

Исследования по физике
мечтов.

1937 г.

226703

226703

U.S. X. 74-824

22. Or. 92 - 145

A. K.

97

98

НКТП

ГЛАВСТРОЙПРОМ

СССР

Всесоюзный научно-исследовательский институт водоснабжения, канализации,
гидротехнических сооружений и инженерной гидрогеологии

ВОДГЕО

Проф. Г. И. ПОКРОВСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ФИЗИКЕ ГРУНТОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ДИСПЕРСНЫХ
СИСТЕМ ПРИМЕНительно
К ГРУНТАМ И ПОЧВАМ

ВНИИСТРОЙПРОМ

СССР

СВЕРДЛОВСК

Москва • 19



37 • Ленинград

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

226.403

624.13 : 550.3

В книге рассматриваются основные физические особенности грунтов как дисперсных систем, определяющие их механическую прочность и некоторые другие важные для техники свойства. Даются предположения для расчета приборов, употребляемых при изучении грунтов. Книга предназначена для научных работников, инженеров-строителей, дорожников, почвоведов и технологов.

Редактор инж. Г. И. Бердичевский

Техн. редактор Д. М. Медриш

Сдано в набор 17/VII 1937 г. Зак. 1844 Подписано к печати 14/X 1937 г.
Формат 62×94 в $\frac{1}{16}$ Уполн. Главлита Б-22532 Печатных листов 8 $\frac{1}{2}$
Издат. № 1175 Индекс С-27-5-4 Учетный № 5727 Тираж 2000 УАЛ 10,6

1-я Журн. тип. ОНТИ НКТП СССР. Москва, Денисовский пер., 30.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	5
От автора	6
Введение. Значение физики почв и грунтов	9
Глава I. Статистическая теория структуры грунта и почвы	10
§ 1. Основные положения	—
§ 2. Основные свойства двухмерного однородного структурора	12
§ 3. Описание при помощи структуроров процессов изменения струк- туры	13
§ 4. Структуры различного направления и их применение к характе- ристике ориентировки структурных элементов почвы	15
§ 5. Практическое приложение структуроров	16
§ 6. Многочленные структуры	18
Глава II. Три фазы в грунтах и почвах	19
§ 1. Гигроскопическая вода в дисперсной системе	—
§ 2. Расчет модуля упругости двухфазной дисперсной системы с абсолютно жестким скелетом	25
§ 3. Влияние смачивания на разбухание глин	28
§ 4. Капиллярные силы в грунтах	31
§ 5. Фильтрация при наличии в грунте заземленного воздуха	41
§ 6. Некоторые механические свойства мерзлых почвы и грунта . .	47
Глава III. Элементы статистической механики грунтов и почв . . .	56
§ 1. Некоторые особенности статистического метода в приложении к грунтам и почвам	—
§ 2. Основные методы статистической механики почв	57
§ 3. Зависимость между силой и деформацией в общем случае	58
§ 4. Зависимость между объемом грунта и силой при отсутствии сдвига и выпирания	61
§ 5. Эллипсоид давлений (напряжений)	62
§ 6. Коэффициент бокового давления	63
§ 7. Распределение напряжений от равномерно загруженной линии (плоская задача)	73
§ 8. Распределение напряжений от загруженной линии в зависимо- сти от глубины	75
§ 9. Общие замечания по динамике почв и грунтов	82
§ 10. Применение статистических закономерностей к явлению тре- ния в грунтах	83
§ 11. Дополнительные соображения о влиянии вибраций на внутре- нее трение в дисперсных системах	91
§ 12. Влияние гидравлических факторов при сдвиге на коэффициент (угол) внутреннего трения	93
§ 13. Деформация сжатия как функция времени	98
§ 14. Влияние вибрации на осадку штампов	100
§ 15. Проникание быстро движущихся тел в почвы и грунты	102
Первый вариант. Применение статистической механики и тер- модинамики	—

Второй вариант. Термомеханическая аналогия	105
§ 16. Распределение напряжений при мгновенной загрузке неупругой среды и поглощении энергии удара	109
Глава IV. Применение физико-математических аналогий к почвам и грунтам	115
§ 1. Распределение напряжений в многослойной среде	—
§ 2. Применение электрогидродинамической аналогии при расчете скорости и величины деформаций грунтовой массы	118
Глава V. Элементы теории приборов, предназначенных для измерения механических свойств грунта	123
§ 1. Некоторые свойства приборов с жесткими стенками	—
§ 2. Основы методики измерения напряжений, возникающих в грунте и других материалах при статических и динамических нагрузках	126
§ 3. Влияние свойств динамометра на точность его показаний	129
Общие выводы	135

Предисловие

Задачи, выдвигаемые современной строительной техникой и особенно гидротехникой перед механикой и физикой грунтов, чрезвычайно разнообразны, сложны и ответственны. Достаточно сослаться на значительные по размерам гидротехнические сооружения, на строительство сложных сооружений в условиях вечной мерзлоты, на проблемы подземных сооружений (метро, коллекторы и т. д.), чтобы громадное разнообразие возможного применения механики и физики грунтов стало совершенно очевидным.

Несомненно, что в последнее время имеются значительные успехи и в теории грунтов. Однако многие печатные труды в этой области еще не объединены и не систематизированы. Значительная часть их стала библиографической редкостью, что крайне затрудняет их использование. Уменьшить хотя бы в некоторой мере этот недочет и является основной задачей издаваемой книги проф. Г. И. Покровского, который в течение многих лет руководил различными исследованиями в области механики и физики грунтов и почв как в Институте Водгео, так и в других институтах в Москве (Фундаментстрой, Почвенный институт Академии наук СССР, Военно-инженерная академия РККА, Академия коммунального хозяйства).

Предлагаемый читателю труд представляет собой сводку тех главнейших результатов, которые были получены в итоге этих исследований как проф. Покровским, так и работавшими под его руководством сотрудниками; на основе такой сводки даются и некоторые обобщающие выводы. Эта книга должна послужить основанием для дальнейшей научно-исследовательской работы в различных областях геотехники. Вместе с тем эта книга должна также привлечь внимание практиков-проектировщиков и строителей, а также и специалистов смежных областей, начиная с физико-химии и кончая геологией. Интерес к затронутым здесь вопросам подтверждается уже тем, что проф. Покровский неоднократно излагал их в виде курсов лекций в различных организациях (Институт повышения квалификации Наркомзема, ВНИТО гидрогеологов, ВНИТО гидротехников), а также посвятил этим вопросам ряд отдельных докладов (в Академии наук СССР, Институте Водгео, Фундаментстрое, Военно-инженерной академии РККА и т. д.). Систематизация основной части этих работ в отдельной книге несомненно поможет дальнейшему распространению, развитию и критике выдвинутых в них, в большинстве новых и своеобразных принципов.

Институт Водгео

ОТ АВТОРА

Эта книга составлена в некоторой своей части на основе работ, опубликованных автором и его сотрудниками в ряде журналов и сборников. В частности сюда вошел материал, представленный автором на Международную конференцию по механике грунтов при Гарвардском университете (1936 г.), а также неоднократно докладывавшийся на расширенных заседаниях при Комиссии инженерных сооружений и стройматериалов отделения технических наук Академии наук СССР. Кроме того в книгу введено несколько новых, ранее нигде не опубликованных разделов. Задачей книги является образовать связующее звено между физикой дисперсных систем, с одной стороны, и механикой грунтов и другими смежными дисциплинами, — с другой. Необходимость в установлении такой связи стала особенно сильно ощущаться в последнее время при разрешении сложных технических задач, возникших при строительстве таких сооружений, как канал Москва — Волга, волжские ГЭС и т. д. На некоторых из этих строительства автору приходилось давать различные консультации, явившиеся первым толчком к составлению этой книги.

Ввиду того что рассматриваемые здесь вопросы относятся к различным, обычно далеко отстоящим друг от друга областям науки, начиная от физической химии и кончая теорией упругости и электродинамикой, автору пришлось проделать значительную работу над унификацией символики. В результате этого некоторые величины оказалось необходимым обозначить не везде принятыми символами и допустить отступления от ОСТ. Однако иного пути для придания символике, примененной в данной книге, необходимой целостности найти не удалось.

Ниже дается перечень принятых в книге обозначений.

Будучи своеобразной по своему направлению и объединяя впервые различные дисциплины для решения некоторых технических задач, эта книга несомненно страдает рядом недочетов; автор заранее выражает благодарность всем, кто счел бы возможным помочь в выявлении этих недочетов.

Автор

ПЕРЕЧЕНЬ ПРИНЯТЫХ В КНИГЕ СИМВОЛИЧЕСКИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

I. Латинские буквы

- A — амплитуда
 a — коэффициент уплотнения
 B — объем воды в единице объема грунта
 b — отношение давления водяного пара к давлению водяного пара, насыщающего пространство
 C — постоянная интегрирования
 c — коэффициент пропорциональности
 D — диаметр
 d — употребляется лишь как знак дифференциала
 E — модуль деформации
 e — употребляется лишь как обозначение основания натуральных логарифмов
 F — сила
 f — употребляется лишь как символ функциональной зависимости
 G — вес
 g — ускорение силы тяжести
 H — высота
 h — деформация
 i — сила (или плотность) тока
 I — импульс
 K — сцепление (сила сцепления, отнесенная к единице поверхности)
 k — коэффициент трения
 k_0 — постоянная Больцмана
 L — длина (вообще некоторое линейное измерение)
 M — масса
 N — безразмерное целое число
 n — безразмерное число, меньшее единицы
 P — давление в трехмерных случаях (сила, отнесенная к единице площади)
 p — давление в двумерных случаях (сила, отнесенная к единице длины)
 R_0 — газовая постоянная
 r — радиус
 S — энтропия
 s — удельная электропроводность
 T — абсолютная температура
 Q — площадь (поверхность); в § 2 гл. IV — плотность расхода воды
 q — коэффициент фильтрации

V — объем (в § 2 гл. IV — электрический потенциал)
 v — скорость
 U — работа; энергия
 W — вероятность
 w — влажность.

II. Греческие буквы

α — значение углов
 β — коэффициент поглощения
 γ — объемный вес
 Δ — деформация
 ξ — коэффициент бокового давления
 λ — длина волны
 μ — молекулярный вес
 σ — поверхностное натяжение жидкости
 ρ — плотность
 τ — время
 η — коэффициент вязкости
 ϵ — пористость
 ν — частота вибраций
 φ — угол трения

Примечание. В § 8 гл. III допущены некоторые отступления от принятых обозначений.

ВВЕДЕНИЕ

ЗНАЧЕНИЕ ФИЗИКИ ПОЧВ И ГРУНТОВ

Грунты и почвы были объектом технического воздействия человека, начиная с древнейших времен. За несколько тысячелетий до нашего времени были построены грандиозные (даже по современным масштабам) сооружения из грунтов, как например земляные плотины в Индии, искусственные пещеры, сложные ирригационные устройства, каналы и портальные сооружения. Тем не менее теория в этой области значительно отстает в своем развитии по сравнению с другими отраслями техники. Однако в течение последнего десятилетия можно констатировать существенный прогресс, связанный преимущественно с работами школы Терцаги. Основой успеха этого нового направления можно считать следующее. В то время как предшественники его рассматривали грунты почти исключительно как некоторые однородные среды, обладающие теми или иными свойствами, Терцаги установил в грунтах и почвах отдельные фазы и стал рассматривать поведение каждой из этих фаз и ее взаимодействие с другими. Несомненно, что осуществление подобного метода оказалось возможным лишь в результате более детального анализа физической природы грунтов и изучения их структуры. Таким образом основой успехов школы Терцаги являются углубление наших знаний о физической природе грунтов и построение на этой базе различных количественных концепций, обоснованных теоретически и экспериментально.

Успехи, достигнутые в последнее время в этой области, создали у некоторых исследователей и практиков мнение о том, что не только общий метод внесения физических основ в область грунтоведения, но также и конкретные предпосылки Терцаги исчерпывают вопрос о природе процессов, определяющих деформации грунтов. Это конечно неверно. Современная наука о грунтах еще весьма далека от того, чтобы использовать все достижения и методы современных точных наук о веществе, в первую очередь экспериментальной и теоретической физики и физико-химии. Достаточно ознакомиться например с такими монографиями, как книга проф. Думанского „Учение о коллоидах“, чтобы увидеть, в какой малой степени используются в научной литературе последних лет современные взгляды на физику дисперсных систем для систематического обоснования и развития механики грунтов и почв, или, точнее, для количественного описания физико-механических процессов, происходящих в почвах и грунтах.

Задачей предлагаемого труда и является несколько восполнить указанный пробел. Поэтому мы сосредоточим основное внимание лишь на сравнительно немногочисленных вопросах, которые как раз и являются звеном, соединяющим физику дисперсных систем с механикой грунтов и (до известной степени) с агромеханикой.

Прежде всего следует отметить, что почвы и грунты не были объектами точных исследований между прочим и потому, что их свойства весьма разнообразны и непостоянны как в пространстве, так и во времени. Поэтому первой нашей задачей будет показать, что эти вариации не только не являются в принципе препятствием для точного количественного описания явлений в области грунтов, но могут и сами по себе явиться объектом плодотворного количественного исследования.

Далее мы перейдем к анализу отдельных главнейших факторов, определяющих механические свойства грунтов, чтобы после этого перейти к синтезу, основанному на статистических методах или тех или иных физико-математических аналогиях.

ГЛАВА 1

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТРУКТУРЫ ГРУНТА И ПОЧВЫ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Существенное значение структуры в почве и грунте, а также и во многих других дисперсных системах привлекало внимание многих исследователей. Тем не менее задачу о точном учете структуры и ее закономерном изменении в желательном для нас направлении нельзя считать решенной до настоящего времени.

Одной из причин этого следует считать отсутствие такого количественного метода учета структуры и ее изменений, который сам по себе соответствовал бы физической природе изучаемого объекта — грунта.

Установление общих физико-математических соотношений встречает здесь значительные трудности вследствие чрезвычайного многообразия, непостоянства и сложности процессов, протекающих в грунте. Поэтому мы не будем стремиться к точной фиксации отдельных элементарных свойств грунтов и сделаем опыт применения общих статистических закономерностей к решению поставленной задачи.

Можно допустить, что грунт образован из множества достаточно мелких частиц различной величины. Эти частицы распределены в пространстве вообще неравномерно, образуя отдельные комки разной величины и более или менее связную массу между ними. Таким образом можно считать, что плотность ρ и сцепление K (отнесенное к единице поверхности) будут как-то варьировать в пространстве. Именно эти вариации и будут непосредственным следствием и внешним, так сказать, механическим выражением структуры¹.

Возьмем N одинаковых проб почвы из одного и того же горизонта. Исследовав тем или иным путем величины ρ и K для всех этих образцов, найдем некоторые колебания этих величин. Если N достаточно велико, то можно построить так называемую функцию распределения, дающую зависимость между $\frac{dN}{d\rho}$ или $\frac{dN}{dK}$ и соответственно ρ или K .

¹ Г. И. Покровский, «Почвоведение» № 1, 1936.

Возможно, что в большинстве случаев мы получим гауссово распределение как наиболее общую форму подобных функций распределения. Однако сейчас мы не будем это предрешать. Больше того, следует с самого начала подчеркнуть, что последующие математические построения гораздо более общи, чем гауссово распределение, и могут быть применены к огромному классу функций распределения.

Вообще функция распределения числа образцов по различной плотности (или сцеплению) будет графически представляться какой-то кривой с максимумом, как это видно из рис. 1. Обозначим расстояние между ординатами, имеющими величину, равную половине максимальной, через ρ_{Δ} , а величину абсциссы, соответствующую максимальной величине ординаты, — через ρ_0 .

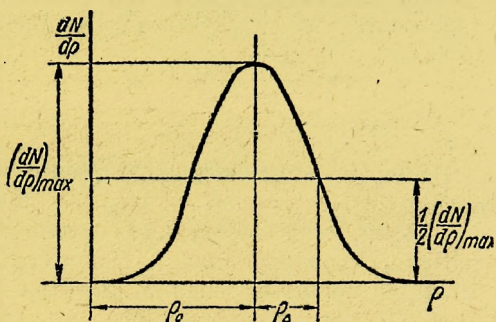


Рис. 1

Можно утверждать, что ρ_0 измеряет некоторую среднюю (не обязательно арифметическую) плотность, а ρ_{Δ} измеряет среднюю величину флуктуаций плотности. Таким образом, отрешаясь пока от анализа функций распределения, мы должны все же принять, что ни плотность, ни сцепление грунта не могут быть выражены однозначно. Если мы хотим подойти к математическому учету структуры грунта, то должны ввести принципиально новые величины, характеризующие флуктуации исследуемых величин. Это в сущности справедливо по отношению к любой численной характеристике таких сложных тел, как грунт или почва. Величины ρ_{Δ} и ρ_0 , так же как и K_{Δ} и K_0 , подчиняются некоторым общим закономерностям. Конечно подобное обобщение возможно лишь при последующих общих построениях и отнюдь не означает, что функции распределения для различных характеристик той или иной почвы тождественны.

Кроме рассмотренных здесь величин ρ и K возможно включить в рассмотрение и ряд других физико-механических характеристик почвы. Они несомненно также будут подчиняться общим статистическим закономерностям. Однако не будем пока загромождать наши рассуждения введением новых величин кроме влажности w , которая аналогично другим величинам будет характеризоваться коэффициентами w_0 и w_{Δ} .

Итак, согласно сказанному структура почвы определяется системой величин; это можно изобразить символически так:

$${}_N\bar{S}_2 = \begin{pmatrix} \rho_0, & \rho_{\Delta} \\ K_0, & K_{\Delta} \\ w_0, & w_{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Многоточие внизу между скобками указывает на возможность включить в характеристику структуры почвы по мере необходимости новые

величины, не нарушая общей математической картины. Совокупность характеристик, стоящую в правой части формулы (1), мы будем в дальнейшем называть «структор».

Формально можно представить структор в виде вектора в фазовом пространстве $2N$ измерений, где N — число свойств, выделенных нами в том или ином случае. Так например, формула (1), учитывающая три свойства и имеющая шесть составляющих структора, требует шестимерного фазового пространства.

В простейших случаях, когда можно ограничиться одним свойством и следовательно двумя его характеристиками, структор может быть изображен вектором на плоском чертеже.

§ 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХМЕРНОГО ОДНОРОДНОГО СТРУКТОРА

Двухмерным однородным структором ${}_1\bar{S}_2$ мы будем называть такую характеристику структуры грунта (почвы), которая образована двумя величинами, характеризующими среднее значение и степень колебаний некоторого свойства почвы. Например мы получим однородный двухмерный структор, употребляя ρ_0 и ρ_{Δ} или K_0 и K_{Δ} . Двухмерный структор может

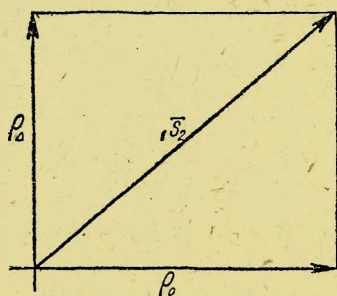


Рис. 2

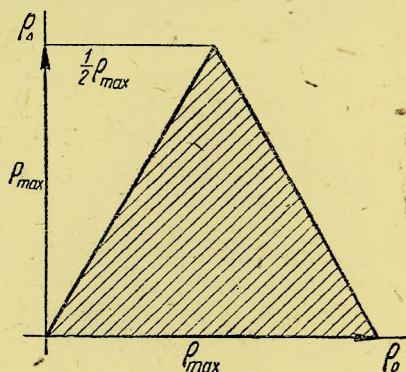


Рис. 3

быть представлен в виде вектора в двухмерной системе координат, как это сделано на рис. 2.

Можно без затруднений отметить на графике область, внутри которой могут лежать отрезки ${}_1\bar{S}_2$. Для этого необходимо лишь принять во внимание следующие два условия:

- 1) $\rho \geq 0$;
- 2) $\rho \leq \rho_{\max}$,

где ρ_{\max} — некоторая максимальная величина, определяемая физическими факторами и равная обычно плотности материала частиц грунта.

Отсюда следует:

$$3) \rho_{\Delta} \leq 2\rho_0.$$

Из этих условий вытекает также, что:

$$4) \rho_{\Delta} \leq 2(\rho_{\max} - \rho_0).$$

Таким образом область, внутри которой лежит $\overline{S_2}$, может быть представлена на диаграмме (ρ_0, ρ_Δ) треугольником (равнобедренным) с основанием ρ_{\max} и высотой, также равной ρ_{\max} , как это видно из рис. 3.

Если считать, что ρ_{\max} есть плотность материала частиц данной среды, то можно утверждать, что пределы изменения структур плотности почвы или грунта определяются плотностью материала частиц.

Точно так же пределы изменения структур сцепления определяются сцеплением материала частиц, а пределы изменения структур влажности — плотностью воды. Двухмерные структуры не являются вполне самостоятельными характеристиками почв и грунтов. Нетрудно доказать например, что пределы изменения структур влажности зависят от структур плотности. Однако мы пока не будем останавливаться на взаимной связи отдельных структур; это потребовало бы детального анализа физических свойств почвы и само по себе могло бы стать темой большого научного исследования. Здесь мы остановимся лишь на общих математических свойствах предлагаемого метода.

§ 3. ОПИСАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ СТРУКТУРА ПРОЦЕССОВ ИЗМЕНЕНИЯ СТРУКТУРЫ

Если при тех или иных условиях структура почвы изменяется, то это сказывается на изменении структур. Процесс изменения структуры почвы можно изобразить символически следующим образом:

$$\Delta \overline{S_2} = \overline{S_2''} - \overline{S_2'} = \left\{ \begin{array}{l} (\rho_0'' - \rho_0'), (\rho_\Delta'' - \rho_\Delta') \\ (K_0'' - K_0'), (K_\Delta'' - K_\Delta') \\ (\omega_0'' - \omega_0'), (\omega_\Delta'' - \omega_\Delta') \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (2)$$

Здесь индекс с двумя штрихами соответствует окончательному, а с одним штрихом — первоначальному состоянию.

В случае двухмерных структур изменение структуры можно изобразить весьма легко графически, как это видно из рис. 4.

Для двухмерного структур можно определить и угол наклона α соответствующего вектора по отношению к оси абсцисс. Мы получим:

$$\alpha = \arctg \frac{\rho_\Delta''}{\rho_0''}. \quad (3)$$

Так же легко подсчитывается и величина угла наклона α_1 вектора изменения структуры. Получается:

$$\alpha_1 = \arctg \frac{\rho_\Delta'' - \rho_\Delta'}{\rho_0'' - \rho_0'}. \quad (4)$$

Если грунт или почва в процессе своего существования проходит последовательно ряд стадий, причем ее свойства являются непрерывной функцией времени τ , то величина вектора, изображающего изменение структуры, будет равна:

$$\Delta_1 \overline{S_2} = \left[\sqrt{[f_{\rho_0}(0) - f_{\rho_0}(\tau)]^2 + [f_{\rho_\Delta}(0) - f_{\rho_\Delta}(\tau)]^2} \right]. \quad (5)$$

Здесь:

$$f_{\rho_0}(\tau) = \rho_0;$$

$$f_{\rho_\Delta}(\tau) = \rho_\Delta$$

«при заданном» значении времени τ . Квадратные скобки, в которые заключен радикал, означают, что знак у корня не имеет значения.

Имея дело с двумерным структуром, можно последовательные изменения его изобразить в виде годографа вектора, изображающего структур. В данном случае, как и обычно, годографом будет являться линия, соединяющая все точки, через которые последовательно проходит при своих видоизменениях конец вектора структур. Таким путем начальное и конечное состояния необходимо на графике изобразить векторами, концы которых соединены кривой годографа. Это показано на рис. 5.

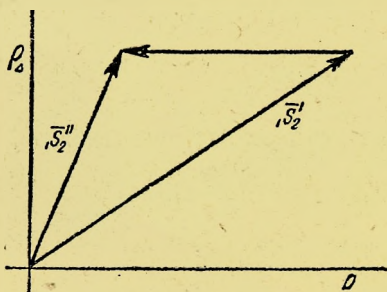


Рис. 4

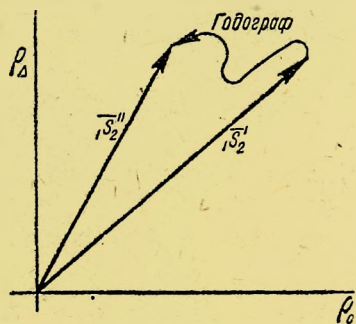


Рис. 5

Таким образом можно утверждать, что соответственное значение $\overline{\Delta_1 S_2}$ есть спрямленный годограф изменения структуры. Если длину годографа изобразить через L_2 , то можно написать, что:

$$L_2 \geq \overline{\Delta_1 S_2}.$$

Это означает, что фактически происходящие изменения структуры могут проходить (и вероятно проходят) через большее число промежуточных стадий, чем это требуется величиной изменения структуры. Другими словами, $\overline{\Delta_1 S_2}$ соответствует изменению структуры, происходящему по кратчайшему пути.

Если грунт или почва подвергается циклическим изменениям в соответствии с временами года и другими периодическими воздействиями, то годограф изменения структуры в двумерном случае должен представлять собой так или иначе замкнутую петлю, примерный вид которой изображен на рис. 6.

Фактически может конечно и не получаться замкнутой петли. Это будет означать, что либо в грунте происходит процесс постепенного разрушения либо, наоборот, этот грунт улучшает свои свойства (например уплотняется). Чтобы более подробно судить об этом, необходимо путем экспериментов установить, какая именно область диаграммы является оптимальной с точки зрения данной конкретной задачи.

§ 4. СТРУКТОРЫ РАЗЛИЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ХАРАКТЕРИСТИКЕ ОРИЕНТИРОВКИ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОЧВЫ

Все изложенное выше не предусматривало возможной пространственной ориентировки структурных элементов почвы. Чтобы учесть также и этот фактор, необходимо подлежащие исследованию образцы почвы брать, учитывая направление: так, можно одну серию образцов взять по горизонтальному, а другую по вертикальному направлению. В последнем случае конечно нужно предусмотреть, чтобы все образцы были взяты из одного и того же почвенного слоя. Пусть структур имеет в первом случае величину, обозначаемую:

$$\frac{\overline{S}}{N \rightarrow 2},$$

а во втором — величину, обозначаемую:

$$\frac{\overline{S}}{N \downarrow 2}.$$

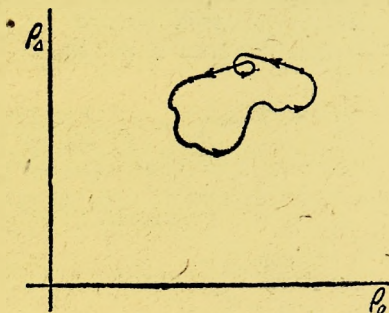


Рис. 6

Образум разность, обозначаемую:

$$\frac{\overline{S}}{N \Delta 2} = \frac{\overline{S}}{N \rightarrow 2} - \frac{\overline{S}}{N \downarrow 2} = \left\{ \begin{array}{c} (\rho_0 \rightarrow - \rho_0 \downarrow), (\rho_{\Delta} \rightarrow - \rho_{\Delta} \downarrow) \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Здесь стрелки у величин в фигурных скобках означают направление линии расположения образцов почвы. Эта разность является характеристикой ориентировки почвенных агрегатов. Назовем ее структуром ориентировки относительно данных осей. Если

$$\frac{\overline{S}}{N \Delta 2} = 0,$$

никакой ориентировки нет.

Величина $\frac{\overline{S}}{N \Delta 2}$ обладает некоторыми особенностями, позволяющими упростить формулу (6). Действительно, исходя из общих статистических соображений, легко доказать, что среднее значение любых количественных характеристик свойств грунта при наличии ориентировки не может изменяться при изменении направления, по которому расположены места взятия образцов.

Поэтому:

$$\frac{\rho_0 \rightarrow}{\downarrow} - \frac{\rho_0 \downarrow}{\downarrow} = \frac{K_0 \rightarrow}{\downarrow} - \frac{K_0 \downarrow}{\downarrow} = \frac{w_0 \rightarrow}{\downarrow} - \frac{w_0 \downarrow}{\downarrow} = 0.$$

Это условие позволяет написать:

$$\overline{S}_{N \Delta 2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\rho_{\Delta}} - \overrightarrow{\rho_{\Delta}} \\ K_{\Delta} - K_{\Delta} \\ \overrightarrow{w_{\Delta}} - \overrightarrow{w_{\Delta}} \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Таким образом структор ориентировки зависит только от флуктуаций отдельных величин, а не от их абсолютного значения.

В случае двухмерного структура структор ориентировки получает особенно простое выражение:

$$\overline{S}_{1 \Delta 2} = \overrightarrow{\rho_{\Delta}} - \overrightarrow{\rho_{\Delta}}. \quad (8)$$

Из всего сказанного вытекает, что полная характеристика структуры почвы, включая и ее ориентировку, получится, если ввести вместо структуратора, учитывающего только среднее значение величин и их флуктуации, структор следующего вида:

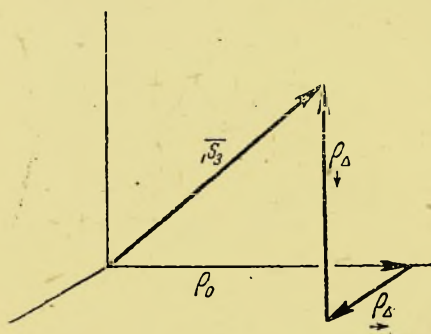


Рис. 7

$$N \overline{S}_3 = \begin{vmatrix} \rho_0, \overrightarrow{\rho_{\Delta}}, \overrightarrow{\rho_{\Delta}} \\ K_0, K_{\Delta}, K_{\Delta} \\ \overrightarrow{w_0}, \overrightarrow{w_{\Delta}}, \overrightarrow{w_{\Delta}} \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Здесь индекс 3 означает, что каждая величина измеряется тремя числами вместо двух. Таким образом, приняв N величин, мы получим $3N$ -мерный структор, изображаемый вектором в фазовом пространстве $3N$ измерений.

Если учитывать только одну величину, то мы получим трехмерный структор, который можно изобразить вектором в обычном трехмерном пространстве, как это видно в перспективе на рис. 7. Все ранее сказанное относительно изменения структуры и годографа изменения структуры применимо и в этом случае. Однако теперь картину следует представлять не на плоскости, а в пространстве.

§ 5. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ СТРУКТОРОВ

Чтобы иллюстрировать приложение общих принципов, изложенных в предыдущих параграфах, рассмотрим несколько простейших случаев. Пусть например у нас структура изменяется так, что более или менее однородные комки распадаются на меньшие, также более или менее однородные, как это видно из рис. 8.

В этом случае можно написать:

$$\rho''_0 = \rho'_0.$$

Кроме того на основании общеизвестных статистических закономерностей можно утверждать, что

$$\rho_A'' < \rho_A'$$

Поэтому на соответствующем графике величина $\overline{\Delta_1 S_2}$ изобразится вертикальным, направленным сверху вниз отрезком, как это показано на рис. 8.

Если мы теперь возьмем другой простейший случай — уплотнение без измерения величины агрегатов, то получим схему, изображенную на рис. 9. Впрочем нужно отметить, что в этом случае может получиться также некоторое незначительное изменение ρ_A за счет изменения числа агрегатов в единице объема грунта, так как из общей статистики известно, что увеличение числа агрегатов должно повести к уменьшению флуктуаций.

Можно было бы привести еще много подобных примеров. Если учитывать даже только одну плотность и принять для ее характеристики согласно сказанному индекс 3, то возможное число случаев будет равно:

$$2^3 - 1 = 7.$$

Для трех же рассчитываемых нами величин, из которых каждая характеризуется индексом 3, число всех возможных случаев изменения структуры будет равно:

$$2^9 - 1 = 511.$$

Едва ли есть смысл рассматривать все эти случаи теоретически. Здесь в первую очередь следует опытным путем установить наиболее интерес-

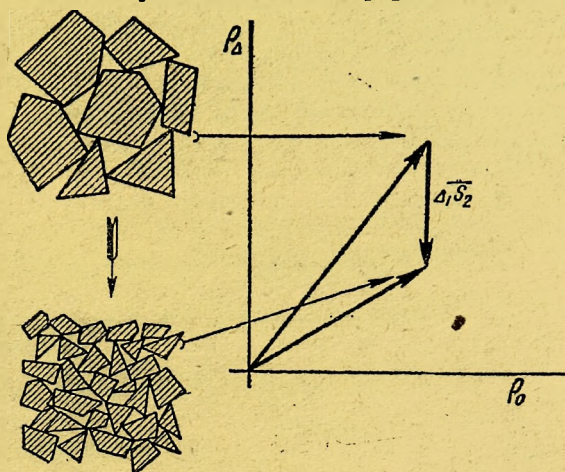


Рис. 8

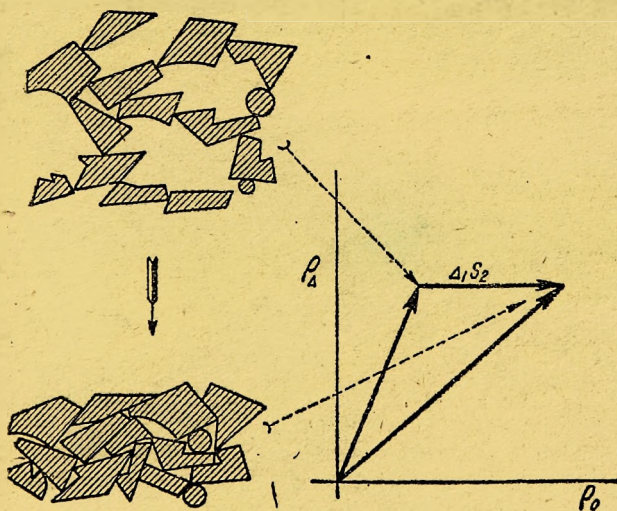


Рис. 9

ные и типичные случаи. Кроме того нужно помнить, что определяемые экспериментально величины могут сами по себе варьировать в зависимости от методики экспериментов.

§ 6. МНОГОЧЛЕННЫЕ СТРУКТОРЫ

Рассмотренная в предыдущих параграфах математическая схема не охватывает всех возможных случаев. Дело в том, что в одном и том же объеме почвы может сосуществовать несколько форм структуры. Можно например представить себе плотные комья значительных размеров, в промежутках между которыми находится мелкораздробленное вещество значительно меньшей плотности и связности.

Здесь мы получим суммирование двух различных функций распределения. В этом случае необходимо структуру характеризовать многочленным структуром, написанным следующим образом:

$$\frac{1-i}{N} \frac{1-i}{3} = \sum_1^i \bar{S}_{N3} = \bar{S}_{N3_1} + \bar{S}_{N3_2} + \dots + \bar{S}_{N3_i}, \quad (10)$$

где i означает число типов сосуществующих структур.

Приведенные здесь математические изображения могут и должны быть в дальнейшем значительно развиты. Однако это необходимо осуществлять в тесной увязке с экспериментом и требованиями прикладной техники. Кроме того нужно отметить, что применение описанного здесь метода гораздо обширнее приложения его в области механики грунтов и в почвоведении. Поэтому следует надеяться, что он будет использован и в других областях науки.

ГЛАВА II

ТРИ ФАЗЫ В ГРУНТАХ И ПОЧВАХ

§ 1. ГИГРОСКОПИЧЕСКАЯ ВОДА В ДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЕ

В данной главе рассматриваются преимущественно так называемые макродисперсные системы, в которых удобно разделить механическим путем отдельные их составляющие фазы.

Чтобы построить теоретическую схему механических процессов, протекающих в грунте, являющемся, в основном макродисперсной системой, необходимо прежде всего уяснить общие свойства различных фаз грунта и выявить взаимоотношения этих фаз. Вообще грунт является системой трехфазной, так как он содержит твердые частицы с адсорбированной пленочной водой, жидкую воду и газообразный воздух (а также пары воды и иные газы). Механические взаимоотношения этих фаз определяются относительно небольшим количеством каждой фазы, а также размерами и формой частиц.

В первую очередь здесь следует поставить вопрос о равновесии между фазами. В частности в этом вопросе существенное значение имеет количество гигроскопической воды, заключенной в почве.

Конечно нужно иметь в виду, что равновесие практически неосуществимо в природных условиях. Тем не менее оно является тем исходным состоянием, изучение которого нужно осуществлять с самого начала.

Вопрос о гигроскопической воде в грунте или почве рассматривался неоднократно с различных точек зрения. Однако все теоретические высказывания по этому поводу носят преимущественно феноменологический характер¹ и могут создать представление, что точный количественный расчет условий равновесия между фазами, основанный на простейших физических закономерностях, неосуществим. Такая точка зрения является до сих пор еще весьма распространенной во многих областях науки о дисперсных системах и особенно в науке о грунтах. Подобная точка зрения однако не является обоснованной. Теоретический расчет количества гигроскопической воды в дисперсной системе может быть осуществлен достаточно определенно. Эта задача решается на основе некоторых положений молекулярной физики и нескольких простых геометрических представлений о структуре грунта или почвы.

Всякая дисперсная система, состоящая из твердой фазы, имеющей поры, и находящаяся в парах какой-либо жидкости, смачивающей данную твердую фазу, будет содержать некоторое количество этой жидкости. Количество жидкости будет зависеть от степени насыщения паров, заполняющих поры твердой фазы. Если степень насыщения равна единице (насыщенный пар), то жидкость заполнит все поры. Если же степень насыщения равна нулю, то жидкости в порах не будет вовсе. При промежуточных значениях степени насыщения количество жидкости будет как-то изменяться. Характер этого изменения можно легко установить, исходя из некоторых простых предпосылок.

Так как особенное значение имеет накопление в пористых телах воды, то в дальнейшем здесь будет рассматриваться именно этот случай. Впрочем все излагаемое далее справедливо также и для любой другой жидкости.

Причин удержания воды в дисперсной системе может быть несколько. Многочисленные исследователи² изучали этот вопрос. Однако до сих пор нет простого и законченного, пусть даже приблизительного способа подсчитывать количество воды, удерживаемой при тех или иных условиях в дисперсной системе, хотя это важно во многих практических случаях. Эта задача может решаться различными путями. Прежде всего следует учесть роль капиллярных сил, понижающих давление паров над вогнутым мениском жидкости, что обуславливает равновесие между жидкостью и паром даже в случае неполного насыщения этого пара.

Исходя из простых термодинамических соображений, можно легко вывести такую формулу³:

$$\ln b = -\sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{\mu}{R_0 \rho T}. \quad (11)$$

¹ А. Ф. Лебедев, Почвенные и грунтовые воды, изд. Академии наук, 1936.

² Обзор литературы см. в книгах А. В. Думанский, Учение о коллоидах, 1935 и Б. И. Кин, Физические свойства почвы, 1933.

³ В. и Э. Родебуш, Введение в физическую химию, 1935, стр. 127—129.

Здесь b — отношение давления пара к его давлению в насыщенном (при данной температуре) состоянии; эту величину можно считать равной относительной влажности воздуха¹;

σ — поверхностное натяжение жидкости;

r_1 и r_2 — радиусы кривизны поверхности мениска (в двух взаимно перпендикулярных плоскостях);

μ — молекулярный вес (для воды $\mu = 18$);

R_0 — универсальная газовая постоянная

$$\left(R_0 = 8,3 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{градус} \cdot \text{моль}} \right);$$

ρ — плотность воды;

T — абсолютная температура.

Для случая воды можно приближенно считать:

$$\frac{\sigma \mu}{R_0 \rho T} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ см.} \quad (12)$$

Таким образом формула (11) приобретает такой вид:

$$\ln b = -5 \cdot 10^{-8} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (13)$$

При удовлетворении соотношения (11) осуществляется равновесие между паром и жидкостью.

Применяя формулу (11) или (13), можно прежде всего выяснить условия, при которых данная система может остаться водонасыщенной. Для этого необходимо, чтобы образующиеся в каналах между частицами мениски имели достаточную кривизну. Вообще каналы будут иметь различные размеры. Если мы имеем достаточно однородную структуру и пористость (отношение объема пор к объему всей системы) порядка 0,3–0,6, то можно приближенно принять, что радиус каналов того же порядка, как и радиус частиц. Таким образом в данном случае можно написать:

$$r_1 = r_2 = r, \quad (14)$$

где r — радиус частицы. Для этого случая формула (11) видоизменяется так:

$$\ln b = - \frac{2\sigma\mu}{rR_0\rho T}. \quad (15)$$

Отсюда:

$$r = - \frac{2\sigma\mu}{R_0\rho T \ln b}, \quad (16)$$

или

$$r = - \frac{10^{-7}}{\ln b}. \quad (17)$$

Так как наиболее вероятные значения b — порядка 0,5 и соответственно:

$$\ln b \approx -0,7,$$

то возможность полного удержания воды капиллярными силами осуществима при:

$$r \approx 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ см.} \quad (18)$$

¹ Г. И. Покровский, Отчет Почвенного института Академии наук СССР по работе для ВИСХОМ, 1936 и „Почвоведение“ № 6, 1936.

Это столь малая величина, что при ней само строение воды в порах будет весьма значительно изменено молекулярными силами и вода по ее механическим свойствам не может уже считаться жидкостью¹.

Аналогичный вывод получается и для случая, когда вода концентрируется в наиболее узких частях пор. В этом случае можно рассмотреть такую схему дисперсной системы, когда последняя состоит из сферических частиц. Тогда количество воды около каждой точки контакта шаров будет равно:

$$V = \frac{\pi r_2^4}{D}, \quad (19)$$

где r_2 — радиус смоченной поверхности частицы;
 D — диаметр этой частицы.

Отсюда:

$$r_2 = - \left(\frac{DV}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (20)$$

Знак минус означает, что центр кривизны находится внутри жидкости. Радиус кривизны мениска в плоскости центров частиц равен:

$$r_1 = \frac{r_2^2}{D} \quad (21)$$

или

$$r_1 = \left(\frac{D}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Подставляя эти величины в формулу (11), получаем:

$$\ln b = - \frac{\sigma \mu}{R_0 \rho T} \left(\frac{\pi}{D} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{V} \right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\sigma \mu}{R_0 \rho T} (\pi D)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{V} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^2. \quad (23)$$

Определяя из этого уравнения V , получаем:

$$V = \frac{\pi^2 D^2}{\left[\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma \mu}{R_0 \rho T} \right)^2 \left(\frac{\pi}{D} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sigma \mu}{R_0 \rho T} (\pi D)^{\frac{1}{2}} \ln b - \frac{\sigma \mu}{R_0 \rho T} \left(\frac{1}{D} \right)^{\frac{1}{4}}} \right]}. \quad (24)$$

Влажность² будет в рассматриваемом случае равна:

$$w = \frac{36 V \rho}{\pi D^3 \rho_{тв}}, \quad (25)$$

где $\rho_{тв}$ — плотность твердой фазы.

При выводе формулы (25) допускается, что каждая частица соприкасается с шестью соседними частицами. Сопоставляя формулу (24) и (25), произведя некоторые сокращения и приняв во внимание, что при увеличении b растет также и V , получаем:

¹ К. Терпаги, Строительная механика грунтов; В. Derjaguin, Zeitschr. f. Physik, 84, 657, 1933.

² Отношение массы воды к массе твердой фазы.

$$\omega = \frac{36\rho}{\rho_{ms}} \left[+ \sqrt{1 - \frac{R_0 \rho T D}{\sigma \mu} \ln b} - 1 \right]^{-4}. \quad (26)$$

Для воды формулу (26) можно переписать так:

$$\omega = \frac{36\rho}{\rho_{ms}} \left[+ \sqrt{1 - \frac{D \ln b}{5 \cdot 10^{-8}} - 1} \right]^{-4} \quad (27)$$

или приближенно:

$$\omega = \frac{9 \cdot 10^{-14} \cdot \rho}{\rho_{ms} D^2 (\ln b)^2}. \quad (28)$$

Отсюда:

$$D = \frac{3 \cdot 10^{-7}}{\sqrt{\ln b}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{ms} \omega}}. \quad (29)$$

Если например $b=0,5$; $\omega=0,03$; $\rho=1$ и $\rho_{ms}=3$, то:

$$D \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ см}. \quad (30)$$

Это также весьма незначительная величина. При подобном размере частиц также могут иметь большое значение поверхностные пленки жидкости, образовавшиеся на частицах.

Из всего изложенного вытекает, что капиллярные силы могут иметь только малое значение для удержания воды от испарения из дисперсных систем, так как даже при $D=10^{-6}$ см их роль незначительна ($\omega=0,03$), а при увеличении D согласно формуле (28) ω быстро уменьшается.

Кроме капиллярных сил вода может удерживаться в дисперсной системе в форме уже упоминавшихся выше поверхностных пленок. Соответствующее значение влажности ω можно рассчитать следующим образом.

Удельная поверхность сферической частицы равна.

$$Q_0 = \frac{6}{D}. \quad (31)$$

Это минимальная возможная удельная поверхность. Если поверхность покрыта пленкой воды толщиной H , то минимальная влажность равна:

$$\omega = \frac{6H\rho}{D\rho_{ms}}. \quad (32)$$

При выводе формулы предполагается, что вся частица покрыта пленкой. Такое допущение можно сделать потому, что по исследованиям Дерягина указанная пленка обладает достаточной прочностью. Величина H точно не установлена.

Так, ряд авторов¹ полагает, что H равно от 20 до 100 молекулярных диаметров. Другие² полагают, что H превосходит тысячи молеку-

¹ P. G. Nutting, „Journ. phys. Chem.“ 31, 531, 1931; K. W. Wagner, „Elektrochem. Zeitschr.“, 35, 887, 1914; Б. М. Го х б а х, „Журнал экспериментальной и теоретической физики“ 1, № 5, 1931; Н. Gernet, „Chemische Zeitung“ 38, 4, 99, и 127, 1932.

² Meyer, „Zeitschr. f. phys. Chem.“ 96, 275, 1920; G. Lewin, „Kolloid Zeitschr.“ 50, 197, 1930; 38, 325, 1926.

лярных диаметров, и наконец третьи¹ считают, что поверхностный слой воды возле твердого тела не превосходит нескольких слоев молекул. Исходя например из работы Дерягина², можно приблизительно допустить: что:

$$H = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см.} \quad (33)$$

Эту величину во всяком случае можно рассматривать как верхний предел для H . При таком условии получаем:

$$\omega = \frac{3 \cdot 10^{-5} \cdot \rho}{D \rho_{ms}} \quad (34)$$

Отсюда:

$$D = \frac{3 \cdot 10^{-5} \cdot \rho}{\omega \rho_{ms}} \text{ см.} \quad (35)$$

Если

$$\rho_{ms} = 3 \text{ и } \omega = 0,03,$$

то:

$$D = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ см} = 3,3 \text{ м.} \quad (36)$$

Эта величина является близкой по своему порядку к частицам, образующим почвы, грунты (глины суглинки) и стройматериалы (бетон). Нужно иметь в виду, что в случае механических процессов пленочная вода должна рассматриваться как некое полутвердое или даже вполне твердое тело.

Установить при наличии водяной пленки зависимость ω от b не представляется пока возможным, так как неизвестна зависимость H от b . Безусловно однако, что:

$$\frac{dH}{db} > 0. \quad (37)$$

Более точную зависимость H от b можно установить опытным путем, исходя из формулы (32) и измеряя ω как функцию b . Подобные опыты проводились например Пэри, Кроутером и Кином³. Однако в цитируемой, а также и в некоторых других⁴ работах по этому вопросу недостаточно выяснен средний диаметр частиц, что лишает возможности непосредственного использования экспериментальных данных для установления степени зависимости H от b .

Поэтому можно применить следующий косвенный способ. Допустим, что в дисперсной системе присутствуют одновременно и пленочная и капиллярная вода. Тогда согласно формулам (28) и (32) общая влажность будет равна:

$$\omega = \frac{9 \cdot 10^{-14} \cdot \rho}{D^2 \rho_{ms} (\ln b)^2} + \frac{6H\rho}{D \rho_{ms}} \quad (38)$$

¹ Goucher, Ward, „Phil Mag.“ 44, 1002, 1922.

² B. Derjaguin, „Zeitschr. f. Physik“ 84, 657, 1933. (Доклад на сессии физического института Академии наук СССР 25/IV 1936.)

³ A. N. Puri, E. M. Crowther, B. A. Keen, „Journ. Agric. Science“ 115, 68, 1925.

⁴ Earl of Barkeley, Hartley, „Proc. Roy Soc.“ (A), 77, 156, 1906; M. D. Thomas, „Soil Science“ 11, 409, 1921.

Эту формулу можно сопоставить с данными, полученными Пэри, Кроутером и Кином при помощи двух параллельных методов. Экспериментальные точки для трех типичных исследованных этими авторами почв сопоставлены на рис. 10 с теоретическими кривыми. Эти кривые по-

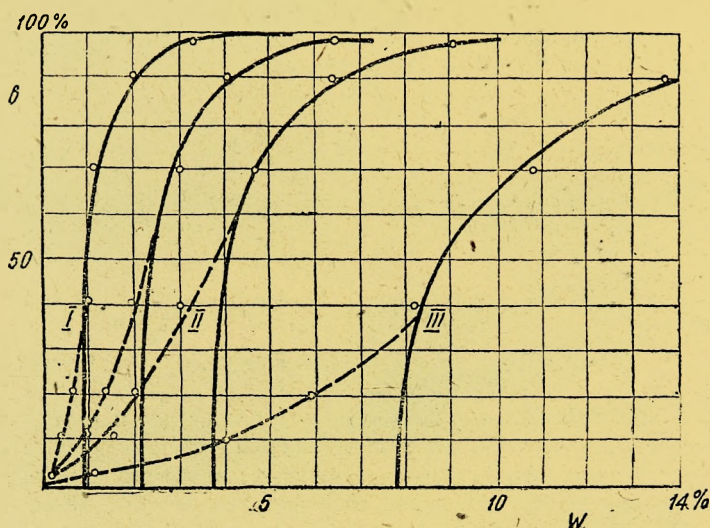


Рис. 10

строены при допущении, что H постоянна и не зависит от влажности воздуха. Как видно из рис. 10, можно добиться известного соответствия теории эксперименту. При этом получается:

- для кривой I $D = 0,4 \text{ м}$;
- « « II $D = 0,8 \text{ м}$;
- « « III $D = 1,5 \text{ м}$;

Во всех случаях:

$$H = 0,2 \cdot 10^{-7} \text{ см.}$$

Эта пленка существенно (в 4 с лишним раза) тоньше принятой нами ранее на основе работ Дерягина, но совпадает по порядку величины с данными Нэттинга, Вагнера, Гохбаха и Гернета, цитированных выше. Кроме того на рис. 10 пунктирные кривые показывают, что до начала капиллярной конденсации, чему соответствует резкий подъем теоретической кривой, мы имеем постепенное нарастание влажности вследствие образования адсорбированного слоя воды. Нетрудно доказать, что при этом эффективная толщина слоя должна подчиняться такому эмпирическому закону:

$$H = 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot b \text{ см,} \quad (39)$$

если $b \leq 0,25$.

Не настаивая на законченности и полной справедливости всего сказанного, можно все же утверждать, что математический анализ описанных явлений может быть достаточно плодотворным. Таким образом можно сделать следующие выводы:

1) общее количество гигроскопической воды в грунте, находящейся в равновесии с парами воды в атмосфере, может быть рассчитано теоретически по формуле (38).

2) На основе опытов Пэри, Кроутера и Кина можно установить толщину адсорбированной пленки воды и ее зависимость от влажности воздуха.

§ 2. РАСЧЕТ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ДВУХФАЗНОЙ ДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЫ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМ СКЕЛЕТОМ

Многочисленные исследования сжимаемости грунтов, осуществляемые в многочисленных лабораториях для прикладных целей, показывают, что независимо от минералогического состава грунтов в большинстве случаев модуль упругости таких систем уменьшается с увеличением степени дисперсности. Это указывает, что здесь мы не имеем обычного явления сжатия твердого тела. Исходя из положений классической теории упругости, нетрудно доказать, что модуль упругости дисперсной системы не зависит от абсолютного размера частиц и определяется только их формой и взаимным расположением. Таким образом уже приведенное обстоятельство дает основание предполагать, что упругость дисперсных систем, состоящих в частности из твердых частиц, зависит от поверхностных слоев этих частиц. Если мы имеем дисперсную систему, содержащую кроме твердой еще и жидкую фазу, то последняя (при наличии положительного смачивания) будет располагаться около точек взаимного контакта частиц. При этом частицы вообще могут не соприкасаться друг с другом¹, и между ними образуется упругая прослойка жидкости, подробно исследованная Дерягиным². Если допустить³, что основная часть деформаций дисперсной системы определяется сжатием (или разбуханием) прослоек жидкости, то становится возможным показать, что модуль упругости должен уменьшаться при увеличении дисперсности, а также вычислить и величину этого модуля.

Дерягин доказал⁴ весьма общим способом, что сила взаимодействия F двух частиц с радиусами r может быть определена, если известна работа U_x , необходимая для сближения двух параллельных площадок, равных 1 см^2 , из бесконечности до данного расстояния x . При этом им получена следующая формула:

$$F = \pi r U_x, \quad (40)$$

где r означает радиус частицы, форма которой принимается за сферу.

¹ А. А. Некрасов, «Журнал технической физики», 1936.

² В. В. Дерягин, «Журнал физической химии», V, 379, 1934.

³ Г. И. Покровский, Отчет Почвенного института Академии наук СССР по работе для ВИСХОМ, 1936.

⁴ В. Derjaguin, «Koll. Z. S.», 69, 155, 1934.

Близкое к этому соотношение еще ранее было получено для частного случая Брадлеем¹. Для расчета U_x примем:

$$P_1 = \frac{c_a}{H^2} \text{ (здесь } c_a = \text{const}), \quad (41)$$

где P_1 — давление, выдерживаемое пленкой воды толщиной H .

Эта формула отвечает довольно хорошо экспериментальным данным Дерягина в значительном интервале изменения P_1 .

Переходя к расчету U_x , мы можем на основе формулы (41) написать:

$$U_x = \left| \int_{\infty}^x P_1 dH \right| = \frac{c_a}{x}. \quad (42)$$

Отсюда и из формулы (40) следует:

$$F = \frac{\pi r c_a}{x}. \quad (43)$$

Допуская, что число частиц на единице поверхности равно $\frac{1}{4r^2}$, получаем давление, действующее на единицу поверхности:

$$P = \frac{\pi c_a}{4rx}. \quad (44)$$

Отсюда получается:

$$\left| \frac{dP}{dx} \right| = \frac{\pi c_a}{4rx^2}. \quad (45)$$

Однако:

$$dx = d\Delta (2r + x), \quad (46)$$

или приближенно:

$$dx = 2r d\Delta, \quad (47)$$

где Δ — деформация единичного слоя.

Из формул (45) и (47) следует:

$$\left| \frac{dP}{d\Delta} \right| = E = \frac{\pi c_a}{2x^2}. \quad (48)$$

Определяем из формулы (44) значение x :

$$x = \frac{\pi c_a}{4rP}, \quad (49)$$

Таким образом, заменяя x в формуле (48), находим:

$$E = \frac{8r^2 P^2}{\pi c_a} \quad (50)$$

Теперь находим значение c_a . Это можно сделать следующим образом. При сближении единичных поверхностей до расстояния, равного молекулярному диаметру, имеющему порядок величины в 10^{-8} см, работа сближения U_{max} должна быть равна удвоенному поверхностному натяжению

¹ R. Bradley, «Phil. Mag». (7), 13, 853, 1932.

(поверхностной энергии) жидкости σ (при полном смачивании), так как вода будет выдавлена из узкой щели. Таким образом:

$$U_{\max} \approx \frac{c_a}{10^{-8}} = 2 \sigma. \quad (51)$$

Для воды это дает:

$$c_a = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}. \quad (52)$$

Можно также написать:

$$E = 1,7 r^2 P^2 \cdot 10^6. \quad (53)$$

Подставляя эту величину в формулу (40) и принимая $r = 10^{-4} \text{ см}$ и $P = 1,18 \text{ кг/см}^2$, получаем:

$$E = 1700 \text{ кг/см}^2.$$

Предельное значение P , при котором раздавливаются пленки воды, равно на основании формул (44) и (51):

$$P_{\max} = \frac{\pi \sigma}{2r}. \quad (54)$$

В нашем случае это дает:

$$P_{\max} = 1,18 \text{ кг/см}^2.$$

Вообще описанным - путем можно составить следующую таблицу (табл. 1).

Таблица 1

$r \text{ в см}$	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
$P_{\max} \text{ в кг/см}^2$	0,000118	0,00118	0,0118	0,118	1,18	11,8	118	1 180
$E \text{ в кг/см}^2 \text{ при } P = 1 \text{ кг/см}$	—	—	—	—	1 700	17	0,17	0,0017

Из приведенной таблицы явствует, что для крупнодисперсных систем в роде песка прослойки воды разрушаются при столь малых нагрузках, что практического значения не имеют. Здесь общая деформация осуществляется исключительно за счет деформации твердой фазы и перемещения ее отдельных частиц. В более мелкодисперсных системах относительная прочность водяных прослоек становится много значительнее, и поэтому их деформации могут составить основную часть деформаций всей системы.

Таким образом, исходя из простейших представлений о механических свойствах тонких пленок воды (между твердыми телами), можно приближенно вычислить модуль сжатия двухфазных дисперсных систем типа грунтов, а также и давление, разрушающее эти пленки. Вычисление дает возможность установить степень дисперсности, при которой водные пленки начинают играть практически заметную роль.

Подобный вывод имеет большое принципиальное значение потому, что на основании некоторых данных различие в механических свойствах крупнодисперсных и мелкодисперсных грунтов нельзя объяснять различием в составе или структуре частиц. Хотя с первого взгляда казалось бы весьма естественным, что различные по величине фракции должны различаться петрографическим составом, а потому также и формой и строением частиц, однако это предположение не оправдывается экспериментально. Так исследование структуры различных фракций некоторых глин, произведенное методами рентгеновского структурного анализа в Фундаментальном и Военно-инженерной академии РККА, показало, что ионная решетка у всех фракций одного и того же грунта вполне одинакова, несмотря на разницу в механических свойствах этих фракций¹. Таким образом по крайней мере в исследованных случаях разницу в механических свойствах следует объяснять влиянием водных пленок или иными аналогичными причинами.

§ 3. ВЛИЯНИЕ СМАЧИВАНИЯ НА РАЗБУХАНИЕ ГЛИН

Образование рассмотренных выше упругих пленок воды может быть также причиной разбухания глин. Особенно просто это можно показать следующим образом².

Обычно принято на основании экспериментальных данных считать, что глина в отличие от песка обладает значительной степенью упругости. Этот вывод вытекает в основном из способности глины значительно разбухать при увлажнении, снимающем со скелета грунта отрицательное, т. е. стягивающее частицы, капиллярное давление.

Природа самих сил, вызывающих разбухание, при этом не анализируется, и принято отождествлять эти силы с обычной упругостью твердых тел.

Но при таком взгляде не поддается объяснению тот факт, что значительное разбухание наблюдается исключительно у мелкодисперсных грунтов.

Здесь следует конечно иметь в виду, что капиллярные силы в крупнозернистых грунтах ничтожны и не могут вызвать заметного сжатия. Однако если их заменить эквивалентной внешней нагрузкой, то крупнозернистые пески, галька и т. п. при разгрузке ни в какой мере не обнаруживают упругости, свойственной глинам.

Таким образом есть основание полагать, что у глин разбухание осуществляется за счет сил особого характера, величина которых зависит от степени дисперсности частиц.

Не представляет затруднения высказать простые предположения о вероятной природе этих сил. Допустим, что частицы глины прижаты капиллярным давлением так, что между ними имеются частично такие узкие щели, в которые вода войти не может (для этого необходимо, чтобы ширина щелей была равна 10^{-8} см или меньше этой величины).

Общая удельная поверхность частиц грунта, как известно, обратно пропорциональна радиусу частиц r ; она равна следовательно:

$$Q = \frac{c}{r}, \quad (55)$$

¹ Это исследование произведено К. В. Васильевым.

² Г. И. Покровский, «Почвоведение» № 2, 1936.

где c — постоянная, являющаяся отвлеченным числом, обычно несколько большим единицы и зависящим от формы и взаимного расположения частиц.

Согласно сказанному часть этой удельной поверхности не будет соприкасаться (при сжатом скелете) с водой и будет тем больше, чем меньше r , т. е. чем уже щели между частицами. Таким образом можно принять, что часть поверхности частиц, не смоченная водой, равна:

$$Q_1 = \frac{c}{r} n.$$

Здесь n является отвлеченным коэффициентом, меньшим единицы, относительно которого можно написать:

$$\frac{dn}{dr} < 0.$$

Все сказанное позволяет написать такую приближенную формулу для Q_1 :

$$Q_1 = \frac{c_2}{rc_1},$$

где $c_1 > 1$ и c_2 — постоянное число, зависящее от формы и расположения частиц, но не зависящее от их абсолютной величины.

Возьмем некоторый объем грунта V_1 при наличии сжимающего почвенного капиллярного давления и снимем это давление, подведя к грунту воду. Пусть объем грунта возрос до величины V_2 и скелет оказался вполне разгруженным от стягивающего капиллярного давления. При таком условии частицы уже не смогут препятствовать прониканию воды во все щели, если только вода смачивает в той или иной степени скелет. Поэтому частицы будут раздвинуты, что и составит основную часть разбухания. Именно такое расклинивающее действие воды можно наблюдать также при наличии в каком-либо веществе тонких трещин, заполняемых смачивающей данное вещество жидкостью. Подобный эффект был установлен в ряде работ профессорами Ребиндером и Дерягиным. Работа разбухания равна, как это вытекает из весьма простого расчета:

$$U_p = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P_{\text{med}} (V_2 - V_1), \quad (56)$$

где P — давление, развиваемое силами разбухания, и

P_{med} — его среднее значение для данного интервала.

С другой стороны, можно на основании закона сохранения энергии полагать, что разбухание произошло в основном (не считая обычной энергии упругости) за счет энергии смачивания поверхности частиц входящей между ними водой. Тогда можно написать приближенно (полагая, что V_2 и V_1 мало отличаются друг от друга и смачивание полное):

$$U_p = Q_1 V_1 \sigma, \quad (57)$$

где σ — поверхностное натяжение воды.

На основании формул (56) и (57) получается:

$$P_{\text{med}} = Q_1 \sigma \frac{V_1}{V_2 - V_1} = \sigma \frac{c}{r} n \frac{V_1}{V_2 - V_1},$$

или, принимая во внимание формулу (55):

$$P_{\text{med}} = \frac{c_2 \sigma}{rc_1 V_{\Delta}} = \frac{cn\sigma}{rV_{\Delta}},$$

где

$$V_{\Delta} = \frac{V_2 - V_1}{V_1}.$$

Итак среднее давление разбухания должно быстро расти при уменьшении размеров частиц, что вполне соответствует действительности. Так как c — порядка единицы, то этот коэффициент можно при грубом приближении считать равным единице.

Величину n следует конечно принять меньше единицы. Допустим, $n = 0,1$. Примем также, что $V_{\Delta} = 0,01$. Считая смачивание полным, имеем:

$$\sigma = 75 \text{ дина/см.}$$

Отсюда для случая, когда $r = 10^{-4} \text{ см}$, получается:

$$P_{\text{med}} = \frac{0,1 \cdot 75}{10^{-4} \cdot 0,01} = 7\,500\,000 \text{ дина/см}^2 = 7,5 \text{ кг/см}^2.$$

Такая величина весьма правдоподобна. Поэтому вышеизложенные приближенные соображения не находятся в количественном противоречии с общепризнанными фактами.

Все изложенное справедливо однако тогда, когда конечное давление равно нулю и частицы имели возможность отойти друг от друга.

Иначе обстоит дело, если та или иная причина препятствует раздвижению частиц. Тогда вода не сможет проникать в щели между частицами и смачивание новой поверхности не произойдет или во всяком случае будет затруднено. В результате этого энергия смачивания будет ничтожна и давление разбухания также невелико. Если же внешнее обжатие снять и дать возможность раздвинуться скелету, то вода проникнет в щели между частицами, что может совершаться довольно медленно по причине большой вязкости воды в узких щелях и гистерезиса смачивания. Поэтому после быстрой разгрузки может наступить постепенное нарастание давления и соответствующего разбухания.

Непосредственным практическим выводом из сказанного является следующее требование к методике исследования почв с ненарушенной структурой, особенно при установлении компрессионной зависимости. При увлажнении почвы с ненарушенной структурой следует воспрепятствовать ее объемному расширению. Только в этом случае столь важный фактор микростроения почвы, как смоченная поверхность частиц, останется неизменным. Обратное же — приведение почвы повторным обжатием после разбухания к первоначальному объему — может потребовать чрезмерно высокого давления и не дать первоначального распределения воды.

¹ Г. И. Покровский, Исследование грунтов, «Труды Гос. института соор.», сообщение 34, 1931, стр. 42—43.

§ 4. КАПИЛЛЯРНЫЕ СИЛЫ В ГРУНТАХ

Обычно грунты и почвы содержат в некотором количестве воздух. Основное значение находящегося в грунте или в почве воздуха для механики этих материалов заключается в том, что его присутствием обусловливается существование свободных поверхностей воды между частицами. Вследствие этого в грунте проявляются силы поверхностного натяжения, называемые иначе капиллярными. Величина этих сил обуславливается кривизной поверхностей, ограничивающих воду. Очевидно, что кривизна эта будет тем больше, чем меньше частицы грунта. Как это будет видно из дальнейшего, капиллярные силы в суглинках и глинах могут достигать чрезвычайной величины, являясь основным фактором прочности и связности почв¹.

Не меньше значение капиллярных сил при фильтрации воды, содержащей пузырьки воздуха, почву и грунт. Как это будет показано далее, присутствие пузырьков воздуха в воде всегда задерживает фильтрацию.

Вообще можно утверждать, что присутствие в грунте воздуха, если его количество находится в известных пределах, делает грунт более прочным и упругим. Поэтому подробное изучение явлений, связанных с присутствием воздуха в грунте, имеет значение не только для выяснения важнейших положений механики грунта, но может привести и к новым способам управления структурой и рационализации геотехники.

Кроме воздуха, сообщающегося с атмосферой, в грунте может быть и защемленный воздух.

Воздух в увлажненном грунте (почве) может оказаться защемленным по двум причинам: во-первых, он может остаться в порах грунта при капиллярном продвижении воды, и, во-вторых, он может выделиться из воды при изменении давления и температуры. Выделение воздуха и особенно других газов последним путем весьма характерно для вод, выходящих наружу с большой глубиной.

При всяком продвижении воды в грунте, если только его скорость не превышает некоторой величины, в первую очередь проникает в грунт вода, движимая капиллярными силами. Как это показано подробнее в другом месте², скорость капиллярного продвижения жидкости в грунте равна:

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{Pr^2}{8\eta H}, \quad (58)$$

где H — расстояние капиллярного проникания³;

τ — время;

P — давление;

r — эффективный радиус пор почвы;

η — коэффициент вязкости жидкости, равный для воды приблизительно 0,01 CGS⁴.

¹ См. литературу: Б. А. Кин, Физические свойства почвы, ГТТИ, 1933.

² Г. И. Покровский и И. В. Лалетин, «Труды ВИОС», сообщение 34, Москва, 1931 (обратить внимание на опечатку в формуле, приводимой здесь в исправленном виде).

³ Или высота. Во всяком случае H измеряется в направлении, перпендикулярном к пьезометрическому уровню.

⁴ CGS — абсолютная система мер: сантиметр-грамм-секунда.

В большинстве случаев, особенно для мелкозернистых грунтов, можно допустить, что давление P , движущее капиллярную воду, подчиняется обычной для капиллярных сил формуле Лапласа, которая в данном случае принимает такой вид:

$$P = \frac{2\sigma}{r}, \quad (59)$$

где σ — поверхностное натяжение, равное для воды при полном смачивании частиц грунта водой 75 дина/см.

Из формул (58) и (59) получаем:

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{\sigma r}{4\eta H}. \quad (60)$$

Если перемещение пьезометрического уровня происходит также со скоростью $\frac{dH}{d\tau}$, то очевидно, что объем грунта, заполненного водой, перемещенной капиллярными силами, будет оставаться неизменным. Ширина зоны с капиллярной водой будет равна согласно формуле (60) следующему:

$$H = \frac{\sigma r}{4\eta \frac{dH}{d\tau}}. \quad (61)$$

Если $\frac{dH}{d\tau}$ достаточно мало, то H , а следовательно и объем, заполненный капиллярной водой, будут очень велики. Во всем этом объеме вода однако не заполнит целиком пор и останется некоторое количество воздуха. Это произойдет потому, что скорость капиллярного поднятия в разных каналах между частицами будет различна. Исходя из формулы (60), можно утверждать, что сначала водой будут заполнены более крупные поры. Вследствие этого в мелких порах окажется защемленным некоторое количество воздуха.

Количество воздуха, остающегося при капиллярном продвижении воды, весьма различно. Оно зависит как от скорости $\frac{dH}{d\tau}$, так и от механического состава, структуры и пористости грунта. Вообще при прочих равных условиях оно тем больше, чем меньше $\frac{dH}{d\tau}$, как это явствует из некоторых наблюдений¹. Это количество может быть определено опытным путем в каждом данном случае. Для этого нужно иметь образец данной почвы с ненарушенной структурой и неизменной влажностью. Пусть объем образца равен V , масса воды в образце — M_1 и масса сухого образца — M_0 . Тогда, очевидно, объем защемленного воздуха определится так:

$$V_1 = V - \frac{M_1}{\rho} - \frac{M_0}{\rho_{мс}}, \quad (62)$$

где ρ — плотность воды (приблизительно равная единице),

$\rho_{мс}$ — плотность скелета грунта.

В описанной зоне капиллярного поднятия воздух будет находиться всегда. Но и ниже пьезометрического уровня возможно присутствие не-

¹ Д. П. Крынин, „Труды ВИС“, вып. 6, Москва 1930.

которого количества воздуха, оставшегося там после капиллярного увлажнения, которое всегда предшествует, как сказано выше, перемещению пьезометрического уровня воды в почве.

Как показывают особые опыты, произведенные Крыниным¹, в малых объемах грунта воздух может оставаться при описанных условиях несколько месяцев. Поэтому можно считать, что даже в залитом водой грунте содержится защемленный воздух в течение многих лет, даже десятков лет.

Таким образом во всех случаях подъема пьезометрического уровня практически следует считать, что грунт содержит воздух. Следовательно учет влияния этого воздуха на свойства такого грунта является при точном расчете обязательным.

Как уже говорилось выше, присутствие воды в грунте сопровождается силами сцепления. Зависимость между влажностью, пористостью и силой сцепления в значительной степени определяется величиной частиц. Имеет также важное значение и форма частиц около точек их взаимного касания.

Рассмотрим сначала соотношение для грунта, состоящего из довольно крупных частиц большой твердости. Этому соответствуют пески без примеси коллоидов и глины.

Если частицы достаточно тверды, то можно считать, что грани их образуют определенно выраженные углы (может быть вообще немного меньше 180°). Так как при исследовании тех или иных явлений в почвах важно получить лишь общую картину, то можно не останавливаться на детальном анализе явлений возле каждой отдельной частицы. Поэтому и в рассматриваемой задаче следует иметь в виду контакт частиц некоторой средней эффективной формы. Наилучшее совпадение с экспериментальными данными и сравнительно простой расчет получится здесь при допущении, что средний эффективный контакт изображается прикосновением вершины конуса и плоскости. Впрочем для большей общности следует допустить, что между вершиной конуса и плоскостью существует некоторое расстояние x , как это видно из рис. 11.

Вода, находящаяся в почве, при наступлении равновесия будет собираться в наиболее узких щелях, несмотря на то, что как раз в этих щелях ее продвижение происходит наиболее медленно, что можно усмотреть из формулы (58). Указанное скопление воды в узких щелях объясняется существованием капиллярного натяжения, стремящегося сократить свободную поверхность воды. Если вода смачивает полностью частицы, то область, занятая ею, будет иметь форму, указанную на рис. 11. При этом вода будет иметь поверхность двойной кривизны с радиусами — r_1 (центр внутри жидкости) и $+r_2$ (центр вне жидкости).

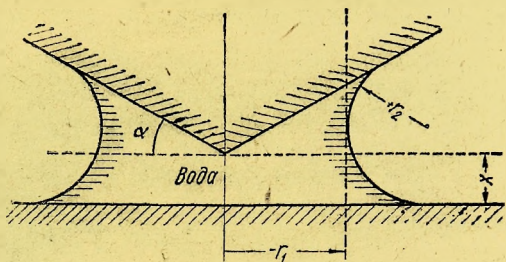


Рис. 11

¹ Д. П. Крынин, «Труды ВИС», вып. 1, Москва 1928.

Если угол α (рис. 11) достаточно мал, что должно наблюдаться в действительности, то можно считать приближенно:

$$r_2 = \frac{1}{2}(\alpha r_1 + x). \quad (63)$$

Здесь α должен быть выражен в радианах.

Ввиду того что объем воды в нашем случае ограничен кривыми поверхностями, в воде должно наблюдаться некоторое отрицательное давление, стремящееся сблизить частицы. Величина этого давления P выразится по Лапласу так:

$$P = \sigma \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{\sigma}{r_1} \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right). \quad (64)$$

Здесь σ , как и раньше, обозначает поверхностное натяжение воды. Чтобы получить силу F , стягивающую две частицы, нужно P умножить на смачиваемую площадь, которая равна приближенно πr_1^2 .

Таким образом получаем:

$$F = P \pi r_1^2 = \pi \sigma r_1 \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right), \quad (65)$$

или, пользуясь формулой (63):

$$F = \pi r_1 \sigma \left(\frac{1}{\frac{\alpha}{2} + \frac{x}{2r_1}} - 1 \right). \quad (66)$$

Для того чтобы выяснить зависимость между F и влажностью, нужно выразить r_1 через объем воды V_g , находящейся между рассматриваемыми частицами. Исходя из простых геометрических соображений, можно написать (приближенно):

$$V_g = 2\pi\alpha \int_0^{r_1} r_1^2 dr_1 + \pi r_1^2 x, \quad (67)$$

что после интегрирования даст:

$$V_g = \frac{2}{3} \pi \alpha r_1^3 + \pi x r_1^2. \quad (68)$$

Это последнее выражение представляет собой уравнение, связывающее объем воды V_g с r_1 . Решая это уравнение по формуле Кардана, можно убедиться, что единственным реальным, т. е. имеющим физический смысл, в данном случае решением будет следующее:

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{3V_g}{4\pi\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2x^3}{3\alpha V_g}} \right) - \frac{x^3}{8\alpha^3}} + \sqrt[3]{\frac{3V_g}{4\pi\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\pi'' x^3}{3\alpha V_g}} \right) - \frac{x^3}{8\alpha^3} - \frac{x}{2\alpha}}. \quad (69)$$

Но и это выражение имеет реальное значение лишь при условии:

$$1 - \frac{\pi^2 x^3}{3\alpha V_s} > 0.$$

Поэтому величина x не может быть сколь угодно большой. Она не должна превосходить предела:

$$x_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3\alpha V_s}{\pi^2}}. \quad (70)$$

Задаваясь различными величинами x и V_s и приняв α за постоянную, можно по формуле (69) определить величину r_1 и потом по формуле (66) — величину F .

Нужно заметить, что при возрастании количества воды F будет расти только до того момента, пока поверхности, ограничивающие воду между отдельными частицами, не начнут сливаться друг с другом. При полном слиянии сила сцепления вновь упадет до нуля.

Таким образом силы сцепления должны упасть до нуля еще до того, как все поры почвы заполняются водой.

Кроме сил сцепления, обуславливаемых присутствием воды, иных форм сцепления во многих грунтах и почвах не существует.

Это легко проверить, погружая кусок грунта в воду. При этом влажность быстро возрастает, поверхности воды между частицами соединяются друг с другом, силы сцепления уменьшаются до нуля и грунт рассыпается или по крайней мере в несколько раз уменьшается его прочность. Такое уменьшение прочности можно наблюдать также у некоторых горных пород (песчаник). Это указывает на то, что ряд горных пород и вероятно стройматериалов частично сцементирован капиллярными силами¹.

Все сказанное до сих пор относилось к общему характеру рассматриваемого явления. Если же задаться вопросом об абсолютной величине сил сцепления в песках, то окажется еще необходимым ввести понятие о средней величине частицы. Пусть радиус средней частицы равен r . Тогда число частиц, приходящихся на 1 см^2 площади сечения грунта, будет равно (приблизительно) $\frac{1}{4r^2}$. — (21)²

Чтобы получить величину сил сцепления, отнесенную к единице поверхности, очевидно, нужно силу взаимодействия между двумя частицами F [формула (65)] умножить на найденное число частиц. Таким образом мы получим в случае, если $x = 0$, следующее:

$$K = \frac{\pi r_1 \sigma_1}{4r^2} \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right), \quad (71)$$

где K — величина силы сцепления, отнесенная к единице поверхности.

Из простых геометрических соображений вытекает, что всегда:

$$r_1 \leq r.$$

Если допустить, что при максимальном содержании воды

$$r_1 = r,$$

¹ Для бетона см. Freyssinet, La révolution dans les techniques du béton, 1936

то для максимальной силы сцепления K_{\max} получится такое выражение:

$$K_{\max} = \frac{\pi \sigma}{4r} \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right). \quad (72)$$

Чтобы определить порядок величины α , что необходимо для расчета K_{\max} , находим сначала связь между количеством воды около одной точки контакта V_s и α , исходя из формулы (68) и полагая $x = 0$. Получаем:

$$V_s = \frac{2}{3} \pi \alpha r_1^3 = \frac{2}{3} \pi \alpha r^3. \quad (73)$$

Допустим, что частицы расположены по закону кубической симметрии; тогда на каждую частицу придется три объема V_s . Число же частиц в единице объема грунта будет равно:

$$\frac{1}{8r^3}.$$

Поэтому количество воды в единице объема грунта при рассмотренных условиях выразится так:

$$B = 3 \cdot \frac{2}{3} \pi \alpha r^3 \cdot \frac{1}{8r^3}, \quad (74)$$

или

$$B = \frac{\pi}{4} \alpha.$$

Вместо B можно ввести обычно принятую влажность грунта w , выражаемую отношением веса воды к весу сухого грунта. Для w получается такое выражение:

$$w = \frac{\pi \alpha}{4} \cdot \frac{\rho}{\rho_{ms}}. \quad (75)$$

Здесь ρ означает плотность воды. Вообще можно считать, что $\rho = 1$, ρ_{ms} означает плотность скелета. Примем приближенно, что $\rho_{ms} = 1,6$, что достаточно близко к действительности.

Тогда

$$w \approx 0,5. \quad (76)$$

В песках максимальная связность получается, очевидно, тогда, когда влажность достигнет указанной здесь величины. Поэтому можно написать, заменяя α в формуле (72) через w , следующее:

$$K_{\max} = \frac{\pi \sigma}{4r} \left(\frac{1}{w} - 1 \right). \quad (77)$$

Обычно в песках величина w составляет около 20%, или 0,2. Исходя из этого числа, легко вычислить значения K_{\max} для различной крупности частиц.

Полученные таким путем числа даны в табл. 2.

Соответствующая формула имеет при этом весьма простой вид:

$$K_{\max} = \frac{\pi \sigma}{r} = 0,000235 \cdot \frac{1}{r} \text{ кг/см}^2.$$

Таблица 2

r в см	1	0,1	0,01	0,001
K_{\max} в кг/см ²	0,000235	0,00235	0,0235	0,235

Сопоставление с опытом показывает, что как величина K_{\max} , так и характер ее зависимости от r весьма близки к тому, что имеется в действительности.

Однако здесь нужно заметить, что точное измерение сил сцепления в песках пока еще не произведено и представляет известные технические трудности. Впрочем при современных приближенных способах расчета это не должно нас особенно затруднять, так как сейчас нам важно знать правильно лишь порядок величины K_{\max} .

Рассмотренная выше схема сил сцепления в песках совершенно неприменима к глинистым почвам. Характер явления в последнем случае совершенно другой. Так например, силы сцепления в глине увеличиваются при уменьшении влажности, чего нет в песках. Кроме того в глинах наблюдается при увлажнении разбухание, что также в случае песка незаметно. Количественно силы сцепления в глинах также отличны от сил сцепления в песках, достигая величины порядка десятков килограммов на 1 см².

Все эти различия заставляют искать причину их в форме частиц возле точек взаимного их касания. В то время как у песка мы получим соответствующие действительности результаты, рассматривая контакт конуса с плоскостью, для глины мы должны принять иную форму частиц.

При этом нужно учесть малую величину частиц глины. В этом случае уже нельзя пренебрегать закруглением углов и ребер, как бы ни был мал их радиус кривизны. Таким образом мы получим в данном случае контакт сферической поверхности и плоскости или контакт двух сфер.

Так как особый подсчет показывает, что для характера явления не имеет значения, взяты ли сферы с одинаковыми или различными радиусами, то мы рассмотрим здесь простейший случай контакта двух одинаковых шаров.

При этом для простоты подсчета заменим сферические поверхности поверхностями двух огибающих параболоидов, общая ось которых проходит через точку контакта.

В этом случае радиусы r_1 и r_2 поверхности, ограничивающей воду, будут связаны таким образом:

$$r_2 = \frac{r_1^2}{2r} + \frac{x}{2}. \quad (78)$$

Это может быть легко выведено из соотношений на рис. 12. Здесь r означает радиус частиц. Общий объем воды, заключенный между частицами, будет при этом равен (приближенно):

$$V_s = 2\pi \int_{r_1=0}^{r_1=r_1} \frac{r_1^3}{r} dr_1 + \pi x r_1^2$$

или

$$V_0 = \frac{\pi r_1^4}{2r} + \pi x r_1^2. \quad (79)$$

Из этого соотношения можно определить r_1^2 . Получается следующее:

$$r_1^2 = + \sqrt{r^2 x^2 + \frac{2}{\pi} r V_0 - r x}. \quad (80)$$

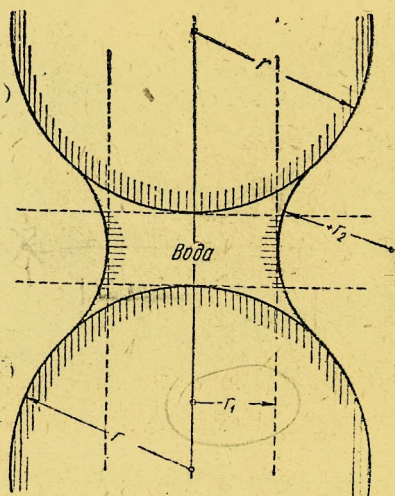


Рис. 12

Для большей ясности дальнейших рассуждений можно величину V_0 заменить отношением B объема воды к объему всего грунта. Для этого проще всего предположить, что в каждом кубе с ребром в $2r$ находится одна частица, соприкасающаяся с соседними в шести точках. Около каждой точки контакта данной частицы помещается $\frac{1}{2} V_0$. Поэтому в кубе грунта объемом $8r^3$ будет заключен объем воды, равный:

$$\frac{6}{2} V_0 = 3V_0.$$

Следовательно:

$$B = \frac{3V_0}{8r^3}. \quad (81)$$

Из формул (80) и (81) получаем:

$$r_1 = 2r \sqrt{+ \sqrt{\frac{x^2}{16r^2} + \frac{B}{3\pi} - \frac{x}{4r}}}. \quad (82)$$

Пользуясь формулой (65) и формулами (78) и (82), можно получить для капиллярной силы, стягивающей частицы, следующее выражение:

$$F = 2\pi s r \sqrt{+ \sqrt{\frac{x^2}{16r^2} + \frac{B}{3\pi} - \frac{x}{4r}}} \times \left(\frac{\sqrt{+ \sqrt{\frac{x^2}{16r^2} + \frac{B}{3\pi} - \frac{x}{4r}}}}{\frac{x}{2r} \sqrt{1 + \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r^2}{x^3} B}} - 1 \right). \quad (83)$$

Величины $\frac{x}{16r^2}$ и $\frac{x^2}{r^2}$ достаточно малы в большинстве случаев; поэтому ими можно пренебречь. Кроме того можно произвести следующую замену:

$$\frac{x}{2r} = x_{\Delta};$$

$$\frac{B}{3\pi} = B_0.$$

При таких условиях получается:

$$F = 2\pi r z \left[\sqrt{B_0 - \frac{x_\Delta}{2}} \left(\frac{\sqrt{B_0 - \frac{x_\Delta}{2}}}{\sqrt{B_0}} - 1 \right) \right]. \quad (84)$$

Для того чтобы перейти от силы F , стягивающей две частицы, к силе сцепления, отнесенной к единице поверхности, необходимо F умножить на число точек контакта на этой единице поверхности.

При принятом расположении частиц это число равно $\frac{1}{4r^2}$. Поэтому для силы сцепления K на единице поверхности получаем:

$$K = \frac{\pi \sigma}{2r} \left[\sqrt{B_0 - \frac{x_\Delta}{2}} \left(\frac{\sqrt{B_0 - \frac{x_\Delta}{2}}}{\sqrt{B_0}} - 1 \right) \right]. \quad (85)$$

Из этой формулы видно, что K имеет реальное значение, если:

$$B_0 - \frac{x_\Delta}{2} > 0.$$

Поэтому величина x_Δ не может превосходить предела:

$$x_{\Delta \max} = 2\sqrt{B_0}.$$

Существование такого предела физически означает то, что при взаимном удалении частиц на расстояния, большие, чем $x_{\Delta \max}$, вода, находящаяся между ними, разрывается на две части и данную систему частиц нельзя рассматривать как связанное целое.

Весьма любопытно, что в данном случае при $B_0 = 0$ и $x_\Delta = 0$, т. е. при отсутствии воды, силы сцепления не исчезают, а наоборот, согласно формуле (85) достигают максимума (рис. 13).

Если от общего характера явления перейти к количественному определению K , то удобнее всего установить его для максимальной величины K_{\max} , соответствующей совершенно сухому грунту.

Может показаться, что положение, согласно которому сцепление, определяемое капиллярными силами воды, при ее полном удалении из почвы достигает максимума, неверно. Однако этот парадокс действительно имеет место, что может быть получено не только теоретически, но и доказано опытом¹.

Полагая $B_0 = 0$ и $x_\Delta = 0$, согласно формуле (85) получаем:

$$K_{\max} = \frac{\pi \sigma}{2r}. \quad (86)$$

¹ Г. И. Покровский и В. Г. Булычев, О силах сцепления в грунтах, «Сборник ВИОС» № 1, 1933.

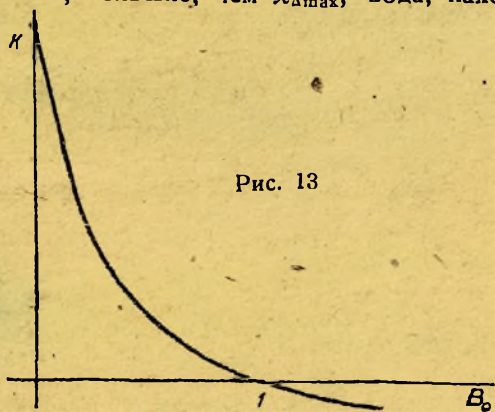


Рис. 13

Для воды эта формула дает значения K_{\max} , приведенные в табл. 3.

Таблица 3

r в см	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
K_{\max} в кг/см ² . .	0,000121	0,00121	0,0121	0,121	1,21	12,1	121

Также представляет интерес то, что полученная величина максимального сцепления точно равна давлению, раздавливающему пленку воды между частицами, как это было доказано раньше. Таким образом капиллярные силы не могут вообще раздавить пленки.

Так как в глинах имеется обычно некоторое количество коллоидов, заполняющих промежутки между большими частицами, то эффективное значение r может быть взято весьма малым.

Поэтому силы сцепления в глинах должны достигать больших величин и K_{\max} может доходить до нескольких десятков килограммов на 1 см², что можно установить и экспериментально.

Кроме рассмотренных здесь сил сцепление частиц будет также усиливаться силами, действующими на границе воздуха, воды и частицы. Однако эти силы будут действовать только при малых влажностях, пока отдельные поверхности воды не начнут сливаться друг с другом. Как показывает особый подсчет, такое слияние начнется уже при $B_0 = 0,007$. Поэтому на этих силах мы здесь подробно не останавливаемся. Отметим лишь, что их роль была мною рассмотрена более подробно в другом месте в связи с полемикой с Фоксом¹. Кроме того следует иметь в виду,² что в случае острого контакта силы, действующие по периметру, компенсируются большой смоченной поверхностью со стороны плоскости.

Переходим к сцеплению в суглинках и супесях.

Под суглинками и супесями будем разумеать здесь грунты, состоящие из более крупных частиц, связанных друг с другом более мелкими частицами.

Характерным свойством таких грунтов является то, что силы сцепления у них изменяются резко при некоторой средней влажности, лежащей, говоря вообще, в пределах от 7 до 18% (от веса сухого грунта²).

Указанная зависимость не вполне соответствует тому, что получается в случае рассмотренных раньше «идеального песка» и «идеальной глины». Теоретическое истолкование резкого скачка сил сцепления при некоторой влажности однако не представляет затруднения. Проще всего искать причину этого явления во взаимодействии крупных и мелких частиц. Если допустить, что поры между крупными частицами заполнены водой со взвешенными в ней мелкими частицами, то, очевидно, при уменьшении количества воды должно наступить такое состояние, когда мелкие частицы начнут заклиниваться между более крупными. Благодаря

¹ G. I. Pokrowski, «Koll. Z. S.» 61, Heft 3, 1932.

² Г. И. Покровский и В. Г. Булычев, О силах сцепления в грунтах, «Сборник ВИОС» № 1, 1933.

этому около каждой точки контакта двух больших частиц образуется кольцо из более мелких. Внутренность этого кольца будет заполнена водой, и площадь смачивания может быть при этом довольно значительной. Однако радиусы кривизны поверхностей жидкости должны быть при этом весьма малыми. Вследствие малой величины радиусов кривизны согласно формуле (64) должно получиться очень большое давление, стягивающее частицы. Поэтому при влажности, соответствующей образованию такого кольца, силы сцепления должны резко возрасти. Это как раз и наблюдается в действительности.

Абсолютная величина сил сцепления в суглинках может таким образом резко изменяться при переходе от малых влажностей к большим. При малых влажностях ее величина колеблется в пределах от 4 до 8 кг/см². При больших влажностях сила сцепления во всяком случае меньше 1 кг/см².

§ 5. ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НАЛИЧИИ В ГРУНТЕ ЗАЩЕМЛЕННОГО ВОЗДУХА

Рассмотрев силы сцепления, переходим к фильтрации.

Как указывалось раньше [формула (58)], существует определенная зависимость между давлением P и скоростью фильтрации $\frac{dH}{d\tau}$.

Из формулы (58) получаем:

$$P = \frac{8\eta H}{r^2} \cdot \frac{dH}{d\tau}. \quad (87)$$

Это соотношение справедливо, когда вода не содержит воздуха. В противном случае для достижения той же скорости фильтрации необходимо большее давление. Это легко показать теоретически. Пусть каналы грунта, пропускающие воду, имеют переменный радиус, причем

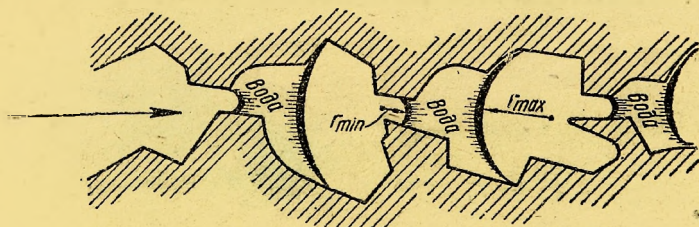


Рис. 14

его максимальные значения равны r_{\max} и минимальные — r_{\min} , как это изображено на рис. 14. Пусть далее фильтрующая через такой канал вода содержит некоторое количество воздуха в виде пузырьков, перемещающихся вместе с водой. Очевидно, что при этом явлении поверхности, ограничивающие воду в канале, будут то увеличиваться (при прохождении больших сечений канала), то уменьшаться (в каналах меньших сечений). При увеличении поверхностной пленки будет затрачиваться работа, равная:

$$(2\pi r_{\max}^2 - 2\pi r_{\min}^2)\sigma.$$

При обратном уменьшении этой пленки соответствующая энергия будет поглощаться вследствие вязкости воды.

При вычислении силы, требующейся для проталкивания одного пузырька через канал длиной в единицу, нужно указанную выше работу умножить на 2, учитывая то обстоятельство, что пузырек ограничен пленками воды с передней и задней стороны.

Кроме того полученную таким образом величину надо умножить на число сужений канала, приходящихся на единицу длины. Если среднее расстояние между двумя сужениями равно $2r_4$, то согласно всему сказанному можно написать:

$$U_f = 4 \pi \zeta (r_{\max}^2 - r_{\min}^2) \frac{1}{2r_4}, \quad (88)$$

где U_f означает искомую работу.

Если эффективные размеры пор грунта определяются радиусом r_3 , то можно допустить, что средний объем пузырька защемленного воздуха равен $\frac{4}{3} \pi r_3^3$.

Если теперь обозначить через V_n объем пор в единице объема почвы и через B объем воды в той же единице объема почвы, то, очевидно, на долю воздуха останется объем $V_n - B$.

При таких условиях число пузырьков воздуха в единице объема почвы будет равно:

$$\frac{V_n - B}{\frac{4}{3} \pi r_3^3}$$

Работа, необходимая для продвижения этих пузырьков на единицу длины, равная, как это нетрудно доказать, соответствующему давлению P_1 , определится согласно формуле (88) так:

$$P_1 = \frac{U_f (V_n - B)}{\frac{4}{3} \pi r_3^3},$$

или

$$P_1 = \frac{3\sigma}{2r_4 r_3^3} (r_{\max}^2 - r_{\min}^2) (V_n - B). \quad (89)$$

Давление же, требующееся для преодоления трения воды, определится согласно формуле (87) так:

$$P_2 = \frac{8\eta \frac{dH}{d\tau} \cdot \frac{B}{V_n}}{r^2}. \quad (90)$$

Величина r представляет собой эффективный радиус канала по отношению к трению воды. Если взять теперь длину фильтрующих каналов равной H , то, очевидно, общее давление, необходимое для движения в них жидкости, будет равно:

$$P = (P_1 + P_2) H, \quad (91)$$

или согласно формулам (89) и (90):

$$P = \left[\frac{3\sigma}{2r_4 r_3^3} (r_{\max}^2 - r_{\min}^2) (V_n - B) + \frac{8\eta \frac{dH}{d\tau}}{r^2} \cdot \frac{B}{V_n} \right] H. \quad (92)$$

Эту формулу можно переписать еще в такой форме:

$$P = \left\{ \frac{3\sigma V_n}{2r_4 r_3^3} (r_{\max}^2 - r_{\min}^2) + B \left[\frac{8\eta \frac{dH}{d\tau}}{r^2 V_n} - \frac{3\sigma}{2r_4 r_3^3} (r_{\max}^2 - r_{\min}^2) \right] \right\} H. \quad (93)$$

Коэффициент, стоящий в этой последней формуле при B , может быть и положительным и отрицательным в зависимости от значения отдельных параметров.

Если он отрицателен, то, очевидно, при возрастании B величина P должна уменьшаться. Это значит, что удаление заземленного воздуха облегчает фильтрацию. Если же названный коэффициент положителен, то при возрастании B , т. е. при уменьшении содержания воздуха, P будет расти. В этом случае заземленный воздух облегчает фильтрацию. Для более детального анализа этих соотношений можно ввести несколько упрощенных допущений. Так, несомненно, что величины r_4 , r и r_3 — одного порядка. Поэтому можно в первом приближении допустить, что они равны. Далее можно считать r_{\max}^2 достаточно большим по сравнению с r_{\min}^2 и пренебречь последней величиной. Наконец можно допустить, что $r_{\max} = cr$ и $r_4 = c_1 r_{\min}$, где c и c_1 — число, большее единицы.

Принимая в расчет все эти допущения, формулу (93) можно переписать следующим образом:

$$P = \left[\frac{3\sigma V_n (c^2 - 1)}{2r_{\max}^3 c^2} + B \left(\frac{8\eta c_1^2 \frac{dH}{d\tau}}{r_{\max}^2 V_n} - \frac{3\sigma (c^2 - 1)}{2r_{\max}^2 c^2} \right) \right]. \quad (94)$$

Граница между областью, в которой заземленный воздух облегчает фильтрацию, и областью, где заземленный воздух тормозит фильтрацию, согласно сказанному определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{8\eta c_1^2 \frac{dH}{d\tau}}{r_{\max}^2 V_n} &= \frac{3\sigma (c^2 - 1)}{2r_{\max}^2 c^2}, \\ \frac{8\eta c_1^2 \frac{dH}{d\tau}}{V_n} &= \frac{3\sigma (c^2 - 1)}{2c^2}. \end{aligned} \quad (95)$$

Если

$$\frac{8\eta c_1^2 \frac{dH}{d\tau}}{V_n} > \frac{3\sigma}{2} \frac{(c^2 - 1)}{c^2}, \quad (96)$$

то мы имеем торможение.

Если

$$\frac{8\eta c_1^2 \frac{dH}{d\tau}}{V_n} < \frac{3\sigma}{2} \frac{(c^2 - 1)}{c^2}, \quad (97)$$

то — ускорение фильтрации при наличии воздуха. Из формулы (95) можно определить границу между названными областями.

Получается следующее:

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{3 \sigma V_n (c^2 - 1)}{c^2 c_1}, \quad (98)$$

или для воды при 10° :

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{1060 V_n (c^2 - 1)}{c^2 c_1} \text{ см/сек.}$$

Принимая $V_n = 0,5$ и $c = 2 = c_1$, получаем следующую величину для указанной скорости:

$$\frac{dH}{d\tau} \approx 100 \text{ см/сек} = 1 \text{ м/сек.}$$

Так как скорость фильтрации на практике никогда указанной величины не достигает, можно считать, что воздух (защемленный в почве) всегда тормозит фильтрацию.

Находящийся в грунте воздух может также тормозить фильтрацию иными способами. Так, часть каналов может быть просто закупорена пузырьками воздуха наподобие того, как закупориваются капилляры кровеносных сосудов при резком изменении давления. Кроме того и свободно плавающие и перемещающиеся в воде пузырьки должны уменьшать фильтрацию, потому что они увеличивают вязкость жидкости. По формуле Эйнштейна:

$$\eta_1 = \eta (1 + 2,5 V),$$

где η — вязкость воды;

η_1 — вязкость воды, содержащей воздух;

V — объем пузырьков воздуха в единице объема пены.

Увеличение же η_1 согласно формулам (90) и (94) увеличивает необходимое для данной фильтрации давление.

Выше были изложены основные свойства грунтов и почв, обусловленные почвенным воздухом. Необходимо добавить к этому несколько соображений о вызываемой наличием воздуха упругости грунтов и почв.

Здесь следует различать два случая: воздух защемлен в грунте и воздух свободно сообщается с окружающей атмосферой. Конечно эти случаи являются предельными, и очень часто в действительности мы будем иметь нечто среднее. Однако для теоретического исследования удобнее рассматривать названные случаи отдельно.

Ввиду практической несжимаемости твердых и жидких тел почва, вполне насыщенная водой, может уменьшаться в объеме лишь за счет удаляемой воды. Однако если в этой почве защемлен воздух, то объемные деформации возможны и без выжимания воды. Обозначим объем воздуха в единице объема грунта через $V_n - B$, а давление в пузырьках воздуха через P_0 .

Пусть на грунт с защемленным воздухом действует давление P . Тогда на основании закона Бойля можно написать:

$$(V_n - B) P_0 = [(V_n - B) - V_\Delta] (P + P_0), \quad (99)$$

где V_Δ — уменьшение единицы объема грунта под действием давления P .

Из формулы (99) легко можно определить V_{Δ} . Получается следующее:

$$V_{\Delta} = \frac{V_n - B}{P + P_0} P. \quad (100)$$

Величина P_0 в почвах может быть весьма значительной, потому что силы поверхностного натяжения будут сжимать воздух, заключенный в отдельных пузырьках.

Считая, что пузырьки ограничены сферическими поверхностями и воздух не имеет сообщения с атмосферой, можно, применив формулу Лапласа, вычислить P_0 . Получается:

$$P_0 = \frac{2\sigma}{r} + P_A, \quad (101)$$

где r — радиус кривизны поверхностей пузырьков и P_A — давление атмосферы.

Из формулы (100) и (101) находим:

$$V_{\Delta} = \frac{V_n - B}{P + \frac{2\sigma}{r} + P_A} P. \quad (102)$$

Если r достаточно мало, то можно формулу (102) упростить следующим образом:

$$V_{\Delta} = \frac{(V_n - B) r}{2\sigma} P. \quad (103)$$

Здесь деформация оказывается пропорциональной давлению P , т. е. оправдывается закон Гука. Если сжатие происходит так, что изменяется только высота столба, а его поперечное сечение останется неизменным, то можно считать, что в этом случае V_{Δ} будет равно уменьшению единицы высоты столба грунта.

Поперечное сечение будет при этом также равно единице. Исходя из этого, можно легко вычислить соответствующий модуль Юнга E :

$$E = \frac{2\sigma}{(V_n - B) r}. \quad (104)$$

Полагая $V_n - B = 0,1$, можно получить для различных r соответствующие значения E , приведенные в табл. 4.

Таблица 4

r в см	0,0001	0,00001	0,000001
E в кг/см ²	15	150	1 500

Переходя теперь к случаю, когда воздух в почве не защемлен, т. е. сообщается с окружающей атмосферой, нужно заметить, что в этом случае будут действовать силы сцепления, способные сопротивляться растягивающей силе, как это было уже рассмотрено выше.

Но кроме этого возможны также силы, сопротивляющиеся сдвигу и имеющие в известных пределах упругий характер.

Основное явление, обуславливающее эти силы, состоит в следующем.

Пусть у нас имеется капля жидкости между двумя смещающимися во взаимно противоположные стороны поверхностями, как это изображено на рис. 15.

Ввиду того что смачивание поверхностей водой обычно происходит не сразу, капля при сдвиге будет деформироваться, переходя из положения А в положение В (рис. 15).

Вследствие этого силы поверхностного натяжения будут стремиться возвратить смещенные поверхности в исходное положение. Зависимость силы от деформации подсчитать в этом случае довольно сложно.

Однако не представляется

затруднительным оценить порядок величины максимального сопротивления сдвигу, какой возможен в этом случае. Если взять единицу поверхности в плоскости сдвига, то число точек контакта между отдельными частицами на этой единице поверхности, равное числу частиц, может быть выражено, как уже указывалось раньше, следующей величиной:

$$\frac{1}{4r^2}.$$

Максимальная длина периметра поверхности жидкости, на которой прилипание противодействует описанному путем сдвигу, будет порядка $2r$.

Величина же сопротивления на единицу длины равна, очевидно, σ . Поэтому «предел упругости» K_c определится следующим образом:

$$K_c = \frac{\sigma}{2r}. \quad (105)$$

Из этой формулы легко определить численные значения K_c при разных r , данные в табл. 5.

Таблица 5

r в см	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
K_c в кг/см ²	0,000034	0,00034	0,0034	0,034	0,34	3,4	34

Из рассмотренных здесь примеров видно следующее:

1. Грунты в большом числе случаев не являются вполне водонасыщенными, но содержат некоторое количество и воды и воздуха. При этом воздух может сообщаться с окружающей атмосферой или быть замкнутым.

2. Во всех случаях капиллярного поднятия воды и вообще везде

около уровня грунтовых вод и выше этого уровня почва содержит как воду, так и воздух.

3. Присутствие воздуха обуславливает существование свободных поверхностей воды и действие сил поверхностного натяжения.

4. Указанное поверхностное натяжение обуславливает существование сил сцепления, весьма значительных в мелкозернистых грунтах.

5. Поверхностное натяжение вызывает также торможение фильтрации.

6. Кроме того присутствием воздуха в грунте обуславливается известная упругость последнего.

Все сказанное позволяет сделать вывод, что воздух, находящийся в известном количестве в грунте, увеличивает прочность этого грунта.

§ 6. НЕКОТОРЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕРЗЛЫХ ПОЧВЫ И ГРУНТА

Сцепление в мерзлых почве и грунте обуславливается спайкой отдельных частиц грунта прослойками льда. Величина силы сцепления K , отнесенной к единице поверхности, определяется при этом следующими факторами:

- 1) временным сопротивлением льда на разрыв K_a ;
- 2) временным сопротивлением на разрыв границы «частица — лед» $K_{ч-л}$;
- 3) временным сопротивлением срезыванию на границе «частица — лед» $K_{с. ч-л}$;
- 4) средней эффективной формой и размером частиц грунта;
- 5) влажностью (содержанием льда в единице объема грунта) B_a ;
- 6) расширением воды при замерзании и скоростью этого замерзания.

Если грунт не полностью увлажнен, т. е. кроме воды в порах имеется также и воздух, то вода будет обычно (при наличии положительного смачивания) концентрироваться в наиболее узких частях пор¹. Чтобы установить зависимость между K и B_a , введем наиболее общий вид количественной характеристики формы частиц грунта около точек их взаимного контакта. Помещая начало координат в точке взаимного контакта двух частиц, можно считать, что расстояние между поверхностями частиц y будет какой-то функцией x . Если рассматривать некоторый средний эффективный случай контакта частиц в данном грунте, то можно представлять поверхность частиц симметричной относительно оси y , образованной вращением соответствующих кривых около названной оси.

Если вода, как сказано, концентрируется в первую очередь в наиболее узкой части пор и если допустить, что ее поверхность близка к цилиндру с образующей y , то объем жидкости около одной точки контакта будет равен:

$$V_s = 2\pi \int_0^x xy \, dx. \quad (106)$$

Но

$$y = f(x).$$

¹ Г. И. Покровский, Капиллярные силы в грунтах, Гидротехгео, 1933.

Поэтому:

$$V_s = 2\pi \int_0^x f(x) x dx. \quad (107)$$

Чтобы сделать интегрирование возможным, введем какую-либо возможно более общую форму зависимости $f(x)$. Можно например написать:

$$y = c_a x^c,$$

где

$$c_a = \text{const и } c = \text{const.} \quad (108)$$

Тогда:

$$V_s = \frac{2\pi c_a}{c+2} x^{c+2}. \quad (109)$$

Величина же поверхности смержания частицы со льдом будет приближенно равна:

$$Q_c = \pi x^2. \quad (110)$$

Отсюда сила, необходимая для разрыва двух частиц, будет равна:

$$F = Q_c K_{c-l} = \pi x^2 K_{c-l}.$$

Определяя величину x из формулы (109), получаем следующее выражение для F :

$$F = \pi K_{c-l} \left(\frac{c+2}{2\pi c_a} V_s \right)^{\frac{2}{c+2}}. \quad (111)$$

Общее число точек контакта между частицами на единице поверхности будет равно:

$$N = \frac{c_b}{4r^2}, \quad (112)$$

где r — радиус (средний) частицы;

c_b — величина, зависящая от структуры грунта и обычно близкая единице.

Количество воды в единице объема грунта будет равно:

$$B = \frac{3c_2}{8r^3} V_s, \quad (113)$$

где c_2 — постоянная, также зависящая от структуры грунта и близкая единице.

Из формулы (113) вытекает:

$$V_s = \frac{8r^3}{3c_2} B. \quad (114)$$

Полагая, что:

$$K = FN, \quad (115)$$

заменяя F по формуле (111) и N по формуле (112), а также, принимая во внимание формулу (114), получаем:

$$K = \frac{1}{4} \pi K_{c-l} \left[\frac{4(c+2)}{3\pi c_a c_2} \right]^{\frac{2}{c+2}} c_b r^{\frac{6}{c+2} - 2} B^{\frac{2}{c+2}}.$$

Обозначим:

$$\frac{1}{4} \pi \left[\frac{4(c+2)}{3\pi c_a c_z} \right]^{\frac{2}{c+2}} c_b = c_0.$$

Тогда:

$$K = c_0 K_{ч-л} r^{\frac{6}{c+2}} B^{\frac{2}{c+2}}. \quad (116)$$

Величина c колеблется обычно, как это вытекает из анализа капиллярных явлений, в пределах от единицы до двух. При таких условиях можно считать, что весь показатель при r близок к нулю. Поэтому можно написать:

$$K = c_0 K_{ч-л} B^2. \quad (117)$$

Здесь:

$$Z = \frac{2}{c+2} < 1.$$

Согласно сказанному ранее должно иметь место соотношение:

$$\frac{2}{3} > Z > \frac{1}{2}.$$

Беря среднее значение:

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{2} \approx 0,6,$$

можно написать:

$$K = c_0 K_{ч-л} B^{0,6}. \quad (118)$$

Так как для глин c больше, то Z должно быть соответственно меньше, чем 0,6. У песков Z должно быть, наоборот, больше 0,6. Впрочем эти колебания при описанной схеме будут невелики.

Формула (118) не исчерпывает всех факторов, действующих в мерзлом грунте. Поэтому она нуждается в соответствующих дополнениях. Прежде всего следует отметить, что точки контакта частиц будут лежать не в одной плоскости. Поэтому прослойки льда будут работать при растяжении грунта также частично и на срезывание. Соответствующая для ясности несколько утрированная схема изображена на рис. 16. Площадь прослоек льда, работающих на срезывание, в случае одной частицы будет пропорциональна поверхности этой частицы, соприкасающейся со льдом. В этом отношении зависимость K от B и r будет аналогична рассмотренной ранее, только вместо $K_{ч-л}$ необходимо подставить в формулу (118) величину временного сопротивления на срезывание $K_{с. ч-л}$. Также и коэффициент c_0 может несколько измениться. Кроме того здесь имеет значение соотношение между размерами отдельных частиц и размерами структурныхностей отдельных грунтов.

При растяжении грунта не вся поверхность смерзания будет вступать в работу одновременно. Чем больше отношение размера частицы к раз-

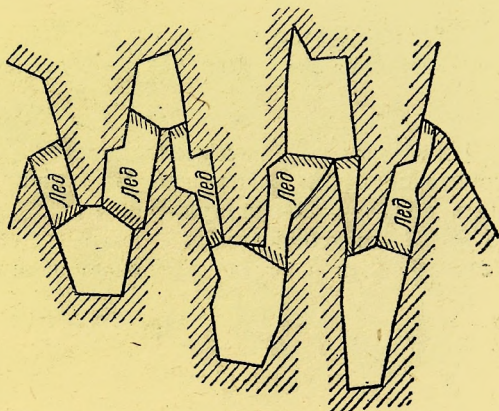


Рис. 16

меру структурного элемента, тем равномернее распределяется напряжение. Поэтому чем больше отношение $\frac{r}{L}$, где L — размеры структурного элемента грунта, тем больше будет сопротивление разрыву. Это можно сформулировать еще так:

$$\frac{\partial K}{\partial \frac{r}{L}} > 0. \quad (119)$$

Простейшим математическим отображением этого требования является установление такой зависимости:

$$c_0 = c_0 \frac{r}{L} + c_u = c_w r + c_u, \quad (120)$$

где $c_w = \text{const}$ и $c_u = \text{const}$.

Исходя из формулы (118), получаем:

$$K = c_w r K_{ч-л} B_0^{0,6} + c_u K_{ч-л} B_0^{0,6}. \quad (121)$$

Для частного случая, когда $K_{ч-л} = K_\lambda$, т. е. сила смерзания грунта со льдом равна силе смерзания льда со льдом, можно видоизменить полученную формулу еще так: при $r = 0$ (предельный случай) и $B = B_0$ — максимальной влагоемкости, соответствующей заполнению льдом всех пор (без разбухания), можно написать:

$$K_\lambda = c_u K_{ч-л} B_0^{0,6}.$$

Отсюда:

$$c_u K_{ч-л} = \frac{K_\lambda}{B_0^{0,6}}.$$

Подставляя полученное значение $c_u K_{ч-л}$ в формулу (121), получаем:

$$K = c_w r K_{ч-л} B_0^{0,6} + K_\lambda \left(\frac{B}{B_0} \right)^{0,6}. \quad (122)$$

Отсюда вытекает, что силы сцепления в мерзлом грунте должны быть больше при указанных условиях, чем в чистом льде. Это парадоксальное явление находит себе экспериментальное подтверждение. Так, Н. А. Цытович установил¹, что при смерзании грунтов с деревом при одном и том же коэффициенте влажности $\left(\frac{B}{B_0} = 0,77 \right)$ сила сцепления зависит от r , как показано в табл. 6.

Таблица 6

Грунт	Глина	Мелкий песок	Средний песок	Лед
r в мм	0,005	0,25	100	—
$K_{ч-л}$ в кг/см ²	15,3	23,3	26,8	13,7

¹ Н. А. Цытович, Основы механики грунтов, стр. 251.

Указанное явление находит себе также качественное объяснение в том, что при наличии частиц грунта во льду поверхность излома получается более неправильная, ее площадь становится больше и поэтому требуется затрата большей энергии на образование излома. Все это впрочем справедливо лишь при условии, когда частицы грунта существенно прочнее льда. Однако опыты Н. А. Цытовича с более крупнозернистыми (чем средний песок) грунтами показали, что при значительных r сила смерзания грунта с деревом вновь уменьшается. Теоретические рассуждения позволяют также при известных условиях предполагать уменьшение прочности мерзлого грунта с очень большими частицами. Здесь существенную роль играет самый характер промерзания грунта. Если промерзание происходит в пределах каждой прослойки воды равномерно, то выведенная формула остается в силе. Если же промерзают сначала одни, а потом другие части грунта и грунт при этом имеет возможность свободно расширяться, то внутри грунта возникают внутренние напряжения, могущие его частично разрушить.

Действительно, замерзая, первая порция воды несколько раздвигает частицы. Следующая порция воды стремится еще более раздвинуть частицы, чему сопротивляется уже образовавшаяся прослойка льда. При дальнейшем развитии такого процесса и при достаточной его скорости, когда не могут заметно проявиться пластические свойства льда, вновь образующиеся объемы льда будут ломать ранее образовавшиеся.

Поэтому будет работать на разрыв и срезывание вообще не вся возможная поверхность смерзания, а только некоторая ее часть. При этом чем больше размеры частиц, тем заметнее будет этот эффект. Это будет влиять на коэффициенты c_0 , c_{II} и c_{ω} , соответственно уменьшая их при увеличении r .

Ввиду значительной сложности этого процесса здесь можно будет ограничиться только общими соображениями, вытекающими из статистической трактовки процесса.

Если согласно сказанному при увеличении r величина K будет уменьшаться, то можно, выключая пока влияние других факторов, утверждать, что это уменьшение должно быть тем больше, чем значительнее K . Действительно, чем больше K , тем больше площадь смерзания частиц со льдом и тем значительнее неравномерности в напряжениях, возникающие при быстром замерзании. Таким образом можно в первом приближении написать:

$$-dK = c_j K dr, \quad (123)$$

где $c_j = \text{const}$.

Отсюда следует:

$$K = K_0 e^{-c_j r}. \quad (124)$$

Здесь K_0 есть значение K , соответствующее формуле (122). Рассуждения, аналогичные только что изложенным, могут иметь место и относительно влияния влажности на K при быстром замерзании. Таким образом получается:

$$K = K_0 e^{-c_g B r}, \quad (125)$$

где $c_g = \text{const}$.

Собирая в одну формулу все рассмотренные свойства, получаем следующее выражение:

$$K = \left[c_w r K_{r-l} B^{0,6} + K_l \left(\frac{B}{B_0} \right)^{0,6} \right] e^{-c_g B r}. \quad (126)$$

Данное уравнение вследствие значительного числа входящих в него констант, которые хотя и могут быть до известной степени определены теоретически, но все же в основном являются эмпирическими величинами, не может претендовать на применение при количественных подсчетах. Однако весьма важно то, что это уравнение связывает все имеющиеся здесь значение факторы и дает возможность сразу сопоставить все возможные здесь соотношения. Формула (126) дает некоторый максимум для K при каждой данной влажности B . Н. А. Цытович получил экспериментально для случая смерзания дерева с грунтом примерное значение, определяющее этот максимум¹, а именно:

$$r = 1 \text{ мм.}$$

Величину B , соответствующую максимуму прочности, Н. А. Цытович на основании эксперимента определяет равной 18%.

Рассмотренные выше соотношения имеют место в случае любого мерзлого грунта независимо от наличия или отсутствия вечной мерзлоты. Гораздо более своеобразные особенности грунта, содержащего воду в твердом состоянии, проявляются в случае вечной мерзлоты.

Прежде всего рассмотрим здесь количественно следующее хорошо известное обстоятельство. Грунт, лежащий в верхних слоях вечной мерзлоты, часто бывает настолько насыщен и расперт льдом, что мы имеем в сущности дело с суспензией грунта в сплошном ледяном массиве. Таким образом верхние слои вечно мерзлого грунта обладают способностью как бы разбухать, засасывая огромное количество льда. Этот процесс вообще возможен лишь в грунтах, характеризующихся некоторой неоднородностью структуры. При наличии такой неоднородности оттаивание и промерзание грунта в каждом данном горизонтальном слое не будут происходить равномерно. Вследствие этого промерзающие в первую очередь части слоя будут приподнимать вышележащие слои и увеличивать пористость грунта. Если при этом имеется достаточный приток воды, то добавочный, полученный описанным путем, объем пор будет также заполнен водой, которая при своем замерзании вновь увеличит пористость, и т. д.

Если плотность льда обозначить через $\rho_{\text{л}}$, то увеличение пористости при замерзании произойдет на величину $\frac{1}{\rho_{\text{л}}} - 1$.

При заполнении водой и замерзании этого добавочного объема произойдет дополнительное увеличение его, равное $\left(\frac{1}{\rho_{\text{л}}} - 1 \right)^2$, и т. д.

Таким образом окончательная влажность после завершения процесса промерзания будет равна:

$$B_2 = B_1 \left[\frac{1}{\rho_{\text{л}}} - 1 + \left(\frac{1}{\rho_{\text{л}}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_{\text{л}}} - 1 \right)^3 + \dots \right] + B_1,$$

¹ Н. А. Цытович, Основы механики грунтов, стр. 249.

или

$$B_2 = B_1 \frac{\rho_{\lambda}}{2\rho_{\lambda} - 1}. \quad (127)$$

Так как $\rho_{\lambda} = 0,9168$, то:

$$B_2 = 1,1 B_1. \quad (128)$$

Если при последующем оттаивании не весь лед в данном слое растает или если вода не успеет уйти наружу, то вторичное замерзание приведет опять к дальнейшему увеличению B . Если описанный процесс произойдет при указанных условиях N раз подряд, то, очевидно, соответствующая влажность будет равна:

$$B_N = 1,1^N B_1. \quad (129)$$

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример. В Усть-Енисейском порту в верхних слоях вечной мерзлоты величина B_N в пять раз превосходит B_1 ¹. Таким образом:

$$1,1^N = 5,$$

или

$$N = \frac{\lg 5}{\lg 1,1} = 17.$$

Это означает, что при наибольшей интенсивности процесса накопления льда потребовалось бы 17 лет для получения имеющегося количества льда. Если принять во внимание, что фактически такой процесс протекает в течение целых геологических эпох, то можно считать, что накопление льда даже при малоблагоприятных условиях может быть весьма значительным. При этом конечно это накопление может происходить только в частично оттаивающих «деятельных» слоях.

Весьма благоприятные условия для засасывания воды в почву и грунт и образования линз из чистого льда могут возникнуть при замерзании криволинейных слоев грунта, особенно при наличии подстилающего массива вечной мерзлоты.

При замерзании водонасыщенного грунта, не имеющего возможности расширяться, в нем возникает следующее давление:

$$P = E\Delta. \quad (130)$$

где E — модуль упругости льда;

Δ — относительное удлинение единицы объема воды при замерзании.

Величина Δ определяется так:

$$(1 + \Delta)^3 = \frac{1}{\rho_{\lambda}}.$$

Отсюда:

$$\Delta = \sqrt[3]{\frac{1}{\rho_{\lambda}}} - 1. \quad (131)$$

¹ Н. А. Цытович, «Труды КИВМ», Академия наук СССР, т. 1, 1930.

Подставляя значение для

$$\frac{1}{\rho_{\text{л}}} = 1,1,$$

получаем:

$$\Delta = 0,029.$$

Полагаем, что E для льда равно¹ 30 000 кг/см². Поэтому:

$$P = 870 \text{ кг/см}^2.$$

При обычных условиях такое давление в близких к поверхности слоях грунта осуществиться не может, так как нет внешних сил, могущих противодействовать столь значительному давлению. Условия, необходимые для получения значительного давления, могут иметь место лишь в замкнутых со всех сторон льдом ячейках грунта. В этом случае возможно также перемещение воды из одной ячейки в другую, если внутри льда остались еще незамерзшие ходы и если скорость замерзания, а следовательно и давление в различных ячейках различны. Градиенты, перемещающие воду, получаются при этом весьма значительные. Максимальное значение градиента, возможного в данном случае, будет равно:

$$1 = \frac{8700}{L}, \quad (132)$$

где L — длина фильтрационного пути в метрах.

Из формулы (132) видно, что градиент может легко прийти до величин порядка тысячи, что несомненно будет сопровождаться разрывом грунта. Особенно большие перемещения воды можно получить, если энергия расширения аккумулировалась в виде энергии упругих сил в замерзших частях грунта и энергии сжатого воздуха (если таковой имеется в грунте). Возможен также прорыв воды наружу в местах, где слой льда тонок или лед еще не успел образоваться. Таким путем вода может например заполнить подвалы зданий, согревающие грунт².

Если грунт частично уже промерз, то его дальнейшее промерзание может вызвать местные оседания и выпучивания поверхности. При наличии большого сопротивления вертикальному расширению в частично промерзшем грунте будет действовать горизонтальное давление. Оно может достигнуть значительной величины, если промерзание по тем или иным причинам произошло весьма неравномерно.

Пусть величина горизонтального давления равна P_1 , а общая толщина промерзающего слоя равна H . Тогда на единицу длины вертикального сечения этого слоя будет действовать сила, равная $P_1 H$. Применяя в данном случае формулу Лапласа, мы можем утверждать, что наличие этой силы вызовет в случае криволинейного пласта некоторое давление P_2 , направленное перпендикулярно к поверхности пласта и стремящееся этот пласт или поднять или опустить. Первое будет иметь ме-

¹ А. Н. Комаровский, Структура и физические свойства ледяного покрова пресных вод, 1932.

² М. Сумгин, Вечная мерзлота почвы в пределах СССР, Владивосток 1927.

сто при выгибе пласта вверх, второе — при выгибе вниз. Величина P_2 определится по формуле Лапласа так:

$$P_2 = P_1 H \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (133)$$

где r_1 и r_2 — радиусы кривизны пласта в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Величина давления, передающегося на воду в подстилающем данный слой грунте, будет равна:

$$P_3 = \gamma H - P_1 H \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (134)$$

где γ — объемный вес грунта.

Рассмотрим следующий пример. Пусть:

$r_1 = r_2 = 1\,000$ см (центр кривизны внутри грунта);

$P_1 = 0,1P = 87$ кг/см²;

$H = 100$ см;

$\gamma = 2$ г/см³.

Тогда:

$$P_3 = 17,2 \text{ кг/см}^2.$$

Такое давление, направленное на холме вверх, несомненно сможет поднять замерзающий на вершине холма слой грунта и засосать под

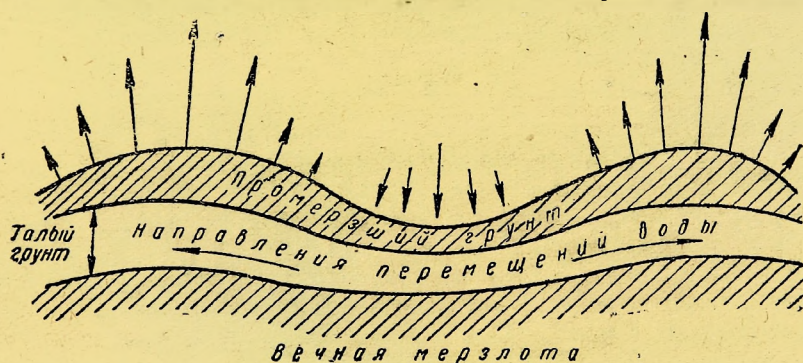


Рис. 17

него воду. Наоборот, в низинах, ямах, где это давление направлено вниз, оно будет вдавливать поверхностный слой, сжимая нижние слои и выдавливая из них воду. Вода будет таким образом концентрироваться в виде линз под вершинами холмов, курганов и других возвышенностей, перемещаемая описанным механизмом из низин (рис. 17). При определенных условиях энергия может накапливаться в сжатом, защемленном воздухе и в упруго деформированном замерзшем грунте и привести к взрыву в местах, где грунт наиболее слаб. Подобный случай, видимо, имел место возле реки Онон на амурско-якутской магистрали¹.

¹ В. Г. Петров, Наледи на амурско-якутской магистрали, изд. Академии наук СССР, 1930.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ И ПОЧВ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА В ПРИЛОЖЕНИИ К ГРУНТАМ И ПОЧВАМ

Почвы и грунты по своей физической природе являются особенно благодарным материалом для приложения статистических методов¹, что уже отмечалось во введении. Это происходит потому, что самые физические характеристики грунтов не являются постоянными величинами. Если мы возьмем из данного грунта ряд проб и исследуем те или иные свойства этих проб, то окажется, что полученные результаты обнаруживают известные колебания, подчиняющиеся обычно простейшей статистической закономерности — гауссову распределению. Если например исследовать пористость грунта ϵ , т. е. отношение объема пор ко всему объему грунта, и обозначить число образцов, имеющих пористость в интервале от $\epsilon - \epsilon_{\Delta}$ до $\epsilon + \epsilon_{\Delta}$, через N , то при условии, что ϵ_{Δ} мало по сравнению с интервалом, в котором вообще происходят колебания ϵ , можно написать:

$$N = c_A e^{-c_B (\epsilon_{\text{med}} - \epsilon)^2 / \epsilon_{\Delta}}, \quad (135)$$

где

$$c_A = \text{const},$$

$$c_B = \text{const};$$

ϵ_{med} — среднее (арифметическое) значение пористости.

Это соотношение, как и обычно все статистические закономерности, тем ближе к действительности, чем больше N (так называемый закон больших чисел). Экспериментальная проверка, подтвердившая это положение, была выполнена в ВИОС Бутовской.

Не подлежит сомнению, что все характеристики грунта обнаруживают статистические колебания довольно значительной величины. Это до известной степени справедливо и для других веществ, однако обычно этим обстоятельством пренебрегают и исходят при теоретических построениях из средних свойств материала, не считаясь с флуктуациями и подменяя таким образом реальную неоднородную среду некоторой идеальной однородной.

Нетрудно на простом примере показать, что подобная идеализация может привести к совершенно неправильному представлению о характере процессов, протекающих в данной среде.

Представим себе, что под действием каких-либо сил происходит срез в грунте. Несомненно, что вследствие статистической природы грунта величина срезающего усилия распределится не вполне равномерно по поверхности среза; несомненно также, что и сопротивление сдвигу будет распределено неравномерно, причем распределение сдвигающих напряжений не будет вполне совпадать с распределением прочности. Поэтому даже в случае, когда среднее срезающее напряжение

¹ H. Schulze, «Bautechnik», Dezember 1936.

будет меньше среднего сопротивления сдвигу, возможно, что в некоторых местах начнется разрушение. В результате этого сопротивления в этих местах уменьшится и соответственно возрастет напряжение в других местах. Увеличение напряжения будет сопровождаться разрушением в новых частях поверхности среза. Развивающийся таким образом процесс может через известное время привести к сдвигу всей рассматриваемой части грунта. Следовательно система, совершенно устойчивая с точки зрения теории идеально однородных тел, окажется неустойчивой с точки зрения статистической теории неоднородного тела.

Рассмотренный пример позволяет продолжить анализ явления. Как говорилось уже раньше, статистические закономерности тем лучше осуществляются, чем большее количество отдельных элементов участвует в данном процессе. Следовательно и в рассмотренном примере участки с очень слабой сопротивляемостью срезу, представленные согласно гауссову распределению в малом числе, именно поэтому могут уже почти не подчиняться названному распределению. Поэтому возможны случаи, когда участков с особо малым сопротивлением или вовсе не окажется или они не будут иметь существенного влияния. Вследствие этого сдвиг может в данный момент и не наступить.

Здесь необходимо подчеркнуть, что представление о грунте как о системе, абсолютно не изменяющейся во времени, противоречит основным представлениям о структуре материи. Не говоря уже о других процессах, молекулярное движение (при всей его незаметности) непрерывно изменяет соотношения сил в точках контакта отдельных частиц. Поэтому рано или поздно может возникнуть такая комбинация сил, при которой произойдет тот или иной сдвиг. Из данного рассуждения вытекает, что при малой средней скорости деформации необходима меньшая сила, чем при большей скорости. Это явление можно при известных условиях наблюдать и на опыте. Так, инж. Н. П. Анахов, определяя коэффициенты внутреннего трения грунтов в лаборатории ВИОС, установил, что для жирной глины при влажности, равной 52%, коэффициенты трения зависели следующим образом от скорости смещения:

Скорость	Коэффициент трения
0,88 мм/мин	0,28
88,0 " 	0,57

Песок мелкозернистый дал соответственно 0,67 и 0,78 и т. д.

Все эти явления трудно объяснить, если считать грунт однородным в пространстве и во времени.

Конечно все приведенные здесь рассуждения имеют общий, иллюстративный характер и могут иметь серьезное значение только при их облечении в количественную математическую форму, а также при одновременном учете и ряда других, пока еще не упомянутых факторов.

§ 2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ПОЧВ

Методы статистической трактовки явлений в почвах могут быть весьма разнообразны. Вообще можно различать три направления.

1. Первое из них состоит в том, что на данное явление переносится

какой-либо из основных математических законов статистики. Задача при этом сводится к выяснению: а) какие именно количественные характеристики данного явления могут быть по существу своему подставлены в избранную формулу, и б) в какой степени следствия, вытекающие из полученной таким путем закономерности, соответствуют природе явления. Примером такого метода является приложение гауссова распределения к эпюре давлений в случае плоской задачи. Об этом будет сказано подробнее дальше.

2. Второй метод состоит в переносе на данное явление закономерности из другой области при условии достаточного родства физической природы сближаемых путем подобной аналогии явлений. Таким путем можно например сбить процессы теплопередачи и распространения вибраций; применение такой аналогии оказывается в частности полезным для расчета быстрых деформаций, что будет также подробно рассмотрено дальше.

3. Третий метод состоит в том, что анализ явления производится со всеми упрощениями, допускаемыми при статистическом подходе. На основании этого анализа составляется общее дифференциальное уравнение, путем интегрирования которого приходят к искомому результату.

Возможны взаимные переплетение и дополнение этих методов. В этом отношении существуют, повидимому, чрезвычайно большие слабо использованные возможности.

§ 3. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СИЛОЙ И ДЕФОРМАЦИЕЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Почвы и грунты не во всех случаях являются линейно-деформируемыми телами. Это означает, что даже и при сравнительно малых силах зависимость между силой и деформацией может не подчиняться линейной зависимости (закон Гука). Таким образом к почвам и грунтам неприменимы без анализа каждого данного случая выводы теории упругости. Поэтому, прежде чем применять теорию упругости к грунтам, необходимо рассмотреть самую природу механических явлений в грунтах и почвах более подробно, что и сделано в дальнейшем изложении. Первой из стоящих перед исследователем в этой области задач является установление такой зависимости между силой и деформацией, которая заменила бы закон Гука, или, вернее, расширила бы этот закон.

Рассмотрим с этой целью самый общий случай деформации, не анализируя при этом деталей.

При действии силы на дисперсные системы в роде грунтов эта сила передается от частицы к частице при помощи системы точек контакта. Несомненно, что чем больше их число (при прочих равных условиях), тем значительнее будет сопротивление системы действию силы. Это означает, что чем больше точек контакта в данной системе, тем меньше деформация при постоянной силе. Число точек контакта не является постоянным, но изменяется в результате действия силы. При этом в общем случае возможны два параллельных, но дающих противоположные результаты процесса. Во-первых, при увеличении силы пористость грунта может уменьшаться, что будет сопровождаться увеличением числа то-

чек контакта и упрочнением системы. Во-вторых, при действии силы возможны внутри грунта различные сдвиги, выпирание и другие формы разрушения, при которых число точек контакта уменьшается и соответственно падает и прочность грунта. В результате этого при некотором определенном значении F_{\max} силы F наступит «полное разрушение», т. е. такое состояние, при котором деформация Δ может быть сколько угодно большой и определяется поэтому уже не свойствами данной системы, а совершенно другими обстоятельствами.

Переходя к количественному выражению изложенного, приходится пока ограничиться первым приближением. Это следует сделать потому, что даже первое приближение дает весьма широкое представление об особенностях изучаемого вопроса, а также потому, что всякое усложнение приведет неизбежно к загромождению основного смысла рядом второстепенных деталей.

Итак, процесс увеличения числа точек контакта приводит к увеличению приращения силы dF , необходимой для дальнейшего приращения деформации $d\Delta$. Это в простейшей форме выразится так:

$$dF = c_1 F d\Delta, \quad (136)$$

где c_1 — некоторая постоянная.

Процесс разрушения, уменьшения числа точек контакта, можно в простейшем виде сформулировать так:

$$dF = c_2 (F_{\max} - F) d\Delta, \quad (137)$$

где $c_2 = \text{const.}$

Поскольку оба процесса действуют совместно, т. е., параллельно, происходят уплотнение грунта и его разрушение, постольку выражения (136) и (137) можно объединить следующим образом:

$$dF = c (F_{\max} - F) F d\Delta, \quad (138)$$

где

$$c = \text{const.}$$

Интегрируя формулу (138), получаем:

$$F = \frac{F_{\max}}{1 + C e^{-c F_{\max} \Delta}}, \quad (139)$$

где C — постоянная интегрирования.

Прежде чем определять эту постоянную, необходимо внести в выражение (139) некоторые дополнения. Формула (139) даст при $\Delta = 0$:

$$F = \frac{F_{\max}}{1 + C}.$$

Так как при $\Delta = 0$ никаких внешних сил не имеется, то полученная величина F должна быть отнесена за счет внутренних сил, прижимающих частицы друг к другу. Под этими внутренними силами можно разуметь как силы тяжести, так и силы сцепления. Вообще внутренние силы могут быть в зависимости от сил внешних. Однако здесь, в первом приближении, мы будем считать внутренние силы постоянными.

Обозначив:

$$\frac{F_{\max}}{1+C} = F_k$$

и сохраняя обозначение F для внешних сил, получаем:

$$C = \frac{F_{\max}}{F_k} - 1$$

и

$$F = \frac{F_{\max}}{1 + \left(\frac{F_{\max}}{F_k} - 1 \right) e^{-c F_{\max} \Delta}} - F_k. \quad (140)$$

Зависимость между F и Δ , получаемая согласно этой формуле, иллюстрируется рис. 18 (кривая I). Из этого графика видно, что при приближении F_k к значению $\frac{1}{2} F_{\max}$ зависимость между F и Δ при

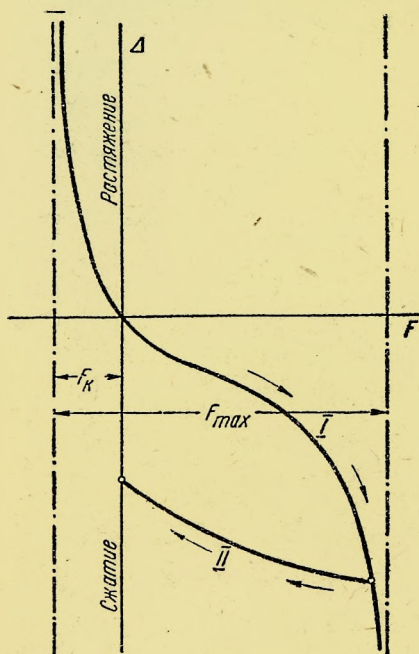


Рис. 18

малых изменениях последней в значительной степени приближается к линейной зависимости Гука. Таким образом можно рассматривать закон Гука как приближенный частный случай формулы (140).

Как видно из рис. 18, величина F может иметь не только положительные, но и отрицательные значения. Последние соответствуют, очевидно, деформациям растяжения. При этом переход от деформации сжатия к деформациям растяжения не сопровождается каким-либо нарушением непрерывности функции:

$$F = f(\Delta).$$

Это и есть не что иное, как так называемый второй закон Гука. Таким образом и этот закон является также следствием формулы (140).

Все изложенное справедливо для случая, когда F постепенно нарастает. При уменьшении F соотношения будут несколько иными уже

потому, что явления деформации грунтов, как и других реальных тел, не являются обратимыми процессами. Необратимость в данном случае сводится к тому, что при уменьшении F число контактов в простейшем случае вовсе не будет расти. Таким образом в этом случае будет наблюдаться только процесс, соответствующий формуле (140). Интегрируя эту формулу, получаем:

$$F = C_1 e^{c_1 \Delta}, \quad (141)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Принимая во внимание внутренние силы, получаем:

$$F = C_1 e^{c_1 \Delta} + F_k.$$

Если $F = 0$, то у нас после разгрузки грунта получится вообще некоторая остаточная деформация Δ_0 . Определяя в этом случае C_1 , находим окончательно:

$$F = F_k [e^{c_1 (\Delta - \Delta_0)} - 1]. \quad (142)$$

Этой формуле соответствует кривая II на рис. 18. Полученные теоретически кривые на рис. 18 в общем хорошо согласуются с данными опыта. Для примера можно привести кривые, полученные при повторных загрузке и разгрузке грунта опытным фундаментом, взятые из книги Иванова и Пономарева «Строительные свойства грунтов» (Ленинград 1932). Кроме того все изложенные здесь соотношения можно применить для исследования зависимости деформации от импульса¹.

§ 4. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ОБЪЕМОМ ГРУНТА И СИЛОЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ СДВИГА И ВЫПИРАНИЯ

Существенное значение для механики почвы и грунта имеют случаи, когда они сжимаются без возможности бокового сдвига или выпирания. При этом в противоположность «сплошным» телам грунты могут существенно уменьшать свой объем за счет выжимания воды или воздуха, находящихся в порах, а также за счет сжатия последнего.

Переходя к количественному анализу явления, можно допустить, что процесса уменьшения числа точек контакта у почвы или грунта, сжимаемого в замкнутом сосуде, быть не может. Поэтому формулу (138) можно переписать (учитывая одновременно наличие внутренней силы F_k) следующим образом:

$$dF = cF_{\max} (F + F_k) d\Delta, \quad (143)$$

что приводит к соотношению:

$$\frac{1}{cF_{\max}} \ln (F + F_k) - C_1 = \Delta,$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Полагая, что если $\Delta = 0$, то и $F = 0$, получаем:

$$\Delta = \frac{1}{cF_{\max}} \ln \left(\frac{F + F_k}{F_k} \right). \quad (144)$$

Не составляет затруднения перейти от этой формулы к зависимости между пористостью и давлением. Для этого необходимо иметь в виду, что при отсутствии бокового расширения деформация возможна только за счет уменьшения пористости. Пусть величина Δ отнесена к единице высоты образца. Тогда:

$$V_p = V_0 - \Delta, \quad (145)$$

где V_p — объем пор в слое грунта с толщиной, равной единице, V_0 — объем пор у нагруженного грунта.

¹ G. I. Pokrowski, «Technical Physics» № 2, 1934.

Так как пористость¹ ϵ пропорциональна V_p , то можно написать:

$$\epsilon = C_2 - C_3 \ln(F + F_k), \quad (146)$$

где $C_2 = \text{const}$ и $C_3 = \text{const}$.

Очевидно, что сила F должна быть пропорциональна давлению P , действующему на грунт. Поэтому можно написать также:

$$\epsilon = C - c \ln(P + P_c). \quad (147)$$

Это выражение тождественно с обычно принимаемой формулой, установленной чисто эмпирически. Здесь C , c и P_c являются константами. При этом C соответствует первоначальной пористости (при $P=0$). Такое совпадение полученной нами формулы с результатом эксперимента может уже рассматриваться как весьма существенное подтверждение изложенных выше рассуждений.

Сравним теперь формулы (140) и (144). При этом допустим, что F_k и F малы в сравнении с F_{max} . Тогда формулу (144) можно приближенно переписать следующим образом:

$$\frac{F + F_k}{F_k} = e^{cF_{\text{max}}\Delta}. \quad (148)$$

Нетрудно доказать, что формулы (148) и (142) тождественны. Это означает, что характер процесса деформации при малых силах протекает одинаково как при наличии бокового расширения, так и при его отсутствии.

Другими словами, при малых силах деформация идет преимущественно за счет уменьшения объема и только постепенно начинает происходить боковой сдвиг.

§ 5. ЭЛЛИПСОИД ДАВЛЕНИЙ (НАПРЯЖЕНИЙ)

Перейдем теперь к эллипсоиду напряжений. Если изложенный вывод правилен, то при малых силах боковой распор должен быть не только абсолютно, но и относительно весьма малым. Только при заметных изменениях внутренней структуры, которые должны сопровождаться боковыми смещениями, боковой распор станет расти. Это конечно будет заметно в первую очередь в случаях, когда боковое смещение или совсем невозможно или в известной степени задерживается.

Из сказанного следует, что эллипсоид напряжений при возрастании давления должен уменьшать свой эксцентриситет. Если мы обозначим через ξ отношение горизонтального и вертикального давлений (при вертикальном сжатии), то согласно сказанному (в случае малых давлений) ξ должно расти при увеличении давления. Это явление должно быть тем заметнее, чем больше связность грунта.

Далее необходимо отметить еще следующее. Поскольку вертикальное и горизонтальное напряжения вообще не будут равны друг другу, постольку и запас потенциальной энергии по различным направлениям будет различен. Между тем из статистической физики и термодинамики известно, что энергия, обусловленная наличием деформации, в любой системе стремится распределиться равномерно между всеми ее возмож-

¹ То-есть отношение объема пор к объему частиц.

ными видами и в частности между всеми направлениями. Применяя этот принцип в нашем случае, мы должны считать грунт с эллипсоидом напряжений, отличным от шара, системой, термодинамически не вполне уравновешенной. Это означает, что любое внешнее воздействие будет стремиться привести данную систему из ее настоящего состояния в другое, более устойчивое. Таким образом всякое сотрясение, вибрация и т. п. при прочих равных условиях должны увеличивать ξ и приближать условия равновесия в грунтовой системе к условиям гидростатическим.

Из сказанного следует, что ξ должно расти при: 1) увеличении давления, 2) вибрациях при ударах.

Аналогичным образом вероятно должны влиять замораживание и оттаивание грунта, резкие изменения температуры, смачивание, высыхание и т. д.

§ 6. КОЭФИЦИЕНТ БОКОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Если некоторый объем любого твердого тела подвергается действию вертикального давления, то в этом теле обнаруживаются силы, производящие также боковой распор. Условимся называть отношение горизонтального давления P_x к вертикальному P_y , его обуславливающему, коэффициентом бокового давления ξ . Согласно принятому определению:

$$\xi = \frac{P_x}{P_y}. \quad (149)$$

Некоторые авторы (Терцаги, Герсеванов) называют коэффициентом бокового давления величину $\frac{\partial P_x}{\partial P_y}$.

Но эта формальная разница не составляет принципиального различия и не может изменить последующих выводов.

Величина ξ имеет большое практическое значение, так как непосредственно связана с константами, применяемыми в теории упругости, механике грунтов и в ряде других дисциплин.

Несмотря на такое большое значение этой величины, она пока еще не подвергалась систематическому теоретическому анализу с целью установить ее связь с другими характеристиками данного материала.

Некоторые формально-математические соображения по этому вопросу¹ не исчерпывают задачи с точки зрения физической природы явлений.

Здесь мы остановимся именно на этой задаче, рассматривая тело, подверженное действию сил, как дисперсную систему. Такой подход является достаточно универсальным, так как большинство стройматериалов и геологических образований, а также и металлы можно рассматривать как твердые дисперсные системы.

Твердую дисперсную систему мы будем рассматривать здесь состоящей из отдельных достаточно прочных и достаточно мало деформируемых элементов, между которыми действуют силы сцепления и силы трения.

При этом именно указанные силы и отличают твердую дисперсную систему от жидкости, где, как известно, действует закон Паскаля и следовательно:

$$\xi = 1. \quad (150)$$

¹ Н. М. Герсеванов, Динамика грунтовой массы, 1933, стр. 131—133.

Таким образом, полагая статическое трение и сцепление равным нулю, мы должны будем при всех последующих рассуждениях получать условия, соответствующие жидкости.

Форму частиц рассматриваемых далее систем мы не фиксируем и некоторые свойства, связанные с этой формой, будем устанавливать статистическими методами.

При действии давления на дисперсную систему оно воспринимается рядом отдельных частиц, которые передают это давление дальнейшим частицам. При этом линии, соединяющие центры частиц, вообще не

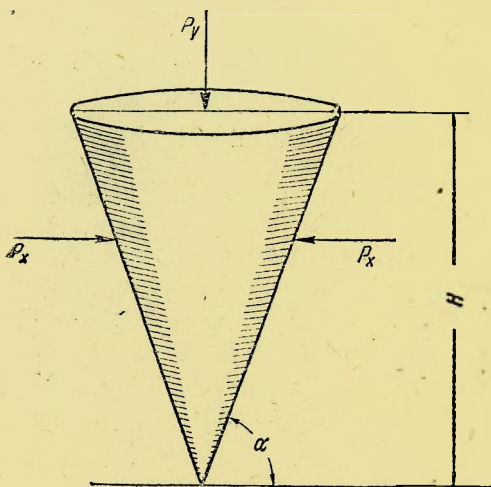


Рис. 19

Ось этого конуса параллельна P_y , и образующая составляет угол α с направлением P_x . Высота конуса — H и радиус его основания — r . На конус действует сила, равная:

$$F = \pi r^2 P_y. \quad (151)$$

Под влиянием этой силы конус может переместиться в вертикальном направлении на величину h и раздвинуть при этом окружающие его частицы на величину:

$$L = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (152)$$

При этом будет совершена работа, равная:

$$U_A = Fh = \pi r^2 P_y h. \quad (153)$$

Эта работа затратится на:

- 1) преодоление трения и сцепления;
- 2) раздвигание окружающих частиц.

Работа трения будет совершена на пути, равном:

$$L_1 = \frac{h}{\sin \alpha}. \quad (154)$$

Соответствующая сила равна (учитывая трение):

$$F_1 = [(P_y \cos^2 \alpha + P_x \sin^2 \alpha) \operatorname{tg} \varphi_0 + K_0] \frac{\pi r H}{\sin \alpha}, \quad (155)$$

Здесь: φ_0 — угол трения между отдельными частицами, не всегда равный углу внутреннего трения всей системы;

K_0 — сила сцепления (тангенциальная), отнесенная к единице поверхности частиц;

$\frac{\pi r H}{\sin \alpha}$ — боковая (трущаяся) поверхность конуса.

Итак, работа на преодоление трения и сцепления равна:

$$U_1 = [(P_y \cos^2 \alpha + P_x \sin^2 \alpha) \operatorname{tg} \varphi_0 + K_0] \frac{\pi r H h}{\sin^2 \alpha}, \quad (156)$$

Работа U_2 , затрачиваемая на раздвигание окружающих частиц, может быть представлена как произведение бокового давления P_x на соответствующее приращение объема. Это приращение объема должно быть при несжимаемом конусе равным $\pi r^2 h$.

Поэтому:

$$U_2 = P_x \pi r^2 h. \quad (157)$$

Согласно закону сохранения энергии:

$$U_A = U_1 + U_2,$$

или

$$U_A - U_1 = U_2. \quad (158)$$

Подставляя вместо U_1 , U_2 и U_A их значения из формул (156), (157) и (153), получаем:

$$\pi r^2 h P_y - [(P_y \cos^2 \alpha + P_x \sin^2 \alpha) \operatorname{tg} \varphi_0 + K_0] \frac{\pi r H h}{\sin^2 \alpha} = \pi r^2 h P_x. \quad (159)$$

Отсюда находим величину:

$$\xi = \frac{P_x}{P_y} = 1 - \left(\frac{1}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{K_0}{P_y} \right) \frac{H}{r} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (160)$$

Отношение

$$\frac{H}{r} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (161)$$

Поэтому:

$$\xi = \frac{1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{K_0}{P_y}}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \varphi_0}. \quad (162)$$

Приближенно можно полагать, что знаменатель последнего выражения близок единице. Поэтому можно также написать:

$$\xi \approx 1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{K_0}{P_y}. \quad (163)$$

В дисперсной системе величина α будет принимать разнообразнейшие значения. Поэтому среднее эффективное значение тригонометрических функций в последней формуле сразу установить нельзя.

Предварительно обозначаем поэтому:

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = c_m = \text{const} \quad (164)$$

и

$$\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = c_n = \text{const}. \quad (165)$$

На основании этого формулу (163) можно переписать так:

$$\xi = 1 - c_m \operatorname{tg} \varphi_0 - c_n \frac{K_0}{P_y}. \quad (166)$$

Это соотношение легко проверить следующим образом. Допустим, что сцепление и статическое трение в данной системе равны нулю. Тогда мы должны получить условия, соответствующие жидкости, и вытекающий отсюда закон Паскаля. Действительно, если:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= 0, \\ K_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

то

$$\xi = 1, \quad (168)$$

что подтверждает формулу (166), так как формулы (150) и (168) тождественны.

При безграничном возрастании P_y величина $c_n \frac{K_0}{P_y}$ в формуле (166) будет приближаться к нулю. Поэтому можно при

$$P_y = \infty \quad (169)$$

обозначить:

$$1 - c_m \operatorname{tg} \varphi_0 = \xi_{\infty} \quad (170)$$

и в случае конечных P_y переписать формулу (166) следующим образом:

$$\xi = \xi_{\infty} - c_n \frac{K_0}{P_y}. \quad (171)$$

Полученная окончательно формула обладает известной общностью, так как не зависит от формы клина, раздвигающего среду. Это можно показать, выведя то же соотношение при замене конуса пирамидой. Возьмем для простоты последующих расчетов четырехгранную пирамиду с основанием, имеющим форму квадрата (рис. 20). Пусть биссектрисы углов у вершины пирамиды составляют угол α с плоскостью, перпендикулярной оси пирамиды. Располагаем эту ось параллельно направлению P_y .

При изложенных условиях работа вдавливания пирамиды на высоту h будет равна:

$$U_A = P_y L^2 h. \quad (172)$$

Работа на преодоление силы трения и сцепления в данном случае выразится так:

$$U_1 = [(P_y \cos^2 \alpha + P_x \sin^2 \alpha) \operatorname{tg} \varphi_0 + K_0] 2 \frac{LHh}{\sin^2 \alpha}. \quad (173)$$

Соответствующая работа бокового давления получится следующая:

$$U_2 = P_x L^2 h. \quad (174)$$

На основании формулы (158) можно написать:

$$L^2 h P_y - [(P_y \cos^2 \alpha + P_x \sin^2 \alpha) \operatorname{tg} \varphi_0 + K_0] 2 \frac{LHh}{\sin^2 \alpha} = Lh^2 P_x. \quad (175)$$

Отсюда находим величину:

$$\xi = \frac{1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha} \cdot \frac{K_0}{P_y}}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \varphi_0}. \quad (176)$$

Это выражение тождественно формуле (162). Поэтому и все дальнейшие выводы, делаемые из формулы (162), могут быть сделаны и из формулы (176). Таким образом можно из этой последней формулы вывести также формулу (171).

Все сказанное позволяет утверждать, что формула (171) выражает некоторые свойства дисперсных систем, общие для различных форм элементарных частиц.

Коэффициенты c_m и c_n , определяемые формулами (164) и (165), являются функциями угла α . Этот угол может принимать в дисперсных системах, подчиняющихся статистическим закономерностям, всевозможные (в известных пределах) значения. При этом относительное количество W_α случаев, соответствующих тому или иному значению α , будет также функцией этого угла. Таким образом величины c_m и c_n должны быть определены следующим образом.

Среднее значение какой-либо функции $f_{\text{med}}(\alpha)$ определяется вообще так:

$$f_{\text{med}}(\alpha) = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} W_\alpha f(\alpha) d\alpha}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} W_\alpha d\alpha}. \quad (177)$$

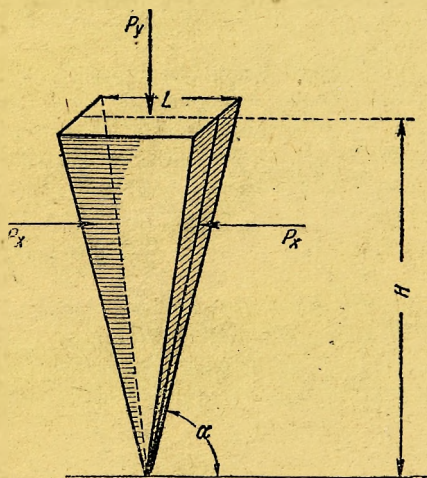


Рис. 20

Для применения этой формулы в данной задаче необходимо выразить W_α как явную функцию угла α . Для этого необходимо задаться известными предпосылками. В самом общем виде подобные предпосылки сформулировать нельзя, так как они зависят от формы и ориентировки частиц в пространстве. Поэтому несколько ограничиваем задачу, рассматривая случай вполне однородных свойств дисперсной системы по всем направлениям. Впрочем этот случай с достаточной степенью точности отражает соотношения в значительном количестве реальных тел вроде грунтов, бетона и т. п.

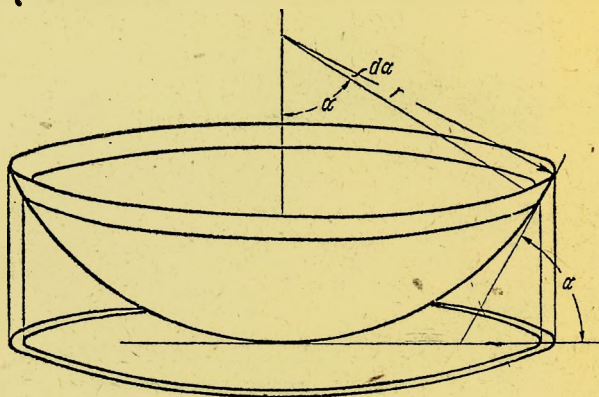


Рис. 21

При этих условиях можно считать все направления поверхностей частиц равновероятными. Это позволяет приписать частицам при данных конкретных условиях сферическую форму. Таким образом всякая опускающаяся под действием вертикального давления частица

будет взаимодействовать с нижележащими частицами в различных частях своей поверхности не одинаково часто. Соответствующая функция M_α будет пропорциональна проекции на горизонтальную поверхность всех частей поверхности сферы, для которых угол наклона лежит в пределах от α до $\alpha + d\alpha$ (рис. 21).

Поэтому относительное значение:

$$W_\alpha = 2\pi r^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (178)$$

При всех дальнейших расчетах постоянная величина $2\pi r^2$ будет выходить за знак интеграла как в числителе, так и в знаменателе и сокращаться. Следовательно при установлении относительного значения W_α можно отбросить постоянные множители и считать:

$$W_\alpha = \sin \alpha \cos \alpha. \quad (179)$$

На основании этого соотношения и формул (177) и (164) получаем следующее выражение для среднего значения коэффициента c_m :

$$c_{med} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2 \alpha d\alpha}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha} = \frac{\left[\sin \alpha \cos \alpha + \alpha \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}}{\left[\sin^2 \alpha \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}}. \quad (180)$$

Пределы в последнем выражении зависят от характера взаимного соприкосновения частиц. При этом в большинстве случаев можно считать,

что

$$\alpha_1 = 0; \quad (181)$$

в этом случае:

$$c_{med} = \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2}. \quad (182)$$

Предел для α_2 установить вообще труднее. При значениях α_2 , близких к $\frac{\pi}{2}$, сила давления на боковые части частицы может быть весьма значительной, что приведет к разрушению частиц до того, как будет достигнуто вытекающее из расчета усилие. Поэтому безусловно:

$$\alpha_2 < \frac{\pi}{2}. \quad (183)$$

Если формально допустить, что наиболее глубокое проникание одного шарика между другими осуществляется в случае наиболее плотной упаковки шаров (что не противоречит прежним рассуждениям о цилиндре и конусе, так как речь идет везде об эффективных для каждого случая формах), то:

$$\alpha_2 = 60^\circ. \quad (184)$$

При таких условиях получается:

$$c_{med} = 1,98. \quad (185)$$

Поэтому вместо формулы (170) получаем:

$$\xi_\infty = 1 - 1,98 \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (186)$$

Таким образом оказывается, что при достаточном трении частиц величина ξ_∞ может быть меньше нуля, т. е. вообще не имеет физического смысла и просто означает отсутствие бокового распора. Впрочем это — маловероятный случай, так как трение поверхностей частиц друг о друга будет весьма незначительным ввиду малости сдвига. Известно, что величина трения не достигает при сдвиге сразу максимума и вначале растёт приблизительно пропорционально сдвигу.

Применяя формулы (165), (177) и (179), можно аналогично изложенному найти величину среднего значения c_n . В этом случае имеем:

$$c_{med} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} da}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha} = 2 \frac{\left| a \right|_{\alpha_1}^{\alpha_2}}{\left| \sin^2 \alpha \right|_{\alpha_1}^{\alpha_2}}. \quad (187)$$

Допуская и в том случае условия (181) и (184), получаем:

$$c_{med} = 2,80. \quad (188)$$

Таким образом формула (166) может быть переписана следующим образом:

$$\xi = 1 - 1,98 \operatorname{tg} \varphi_0 - 2,80 \frac{K_0}{P_y}. \quad (189)$$

Обычные методы исследования дисперсной системы без дополнительного изучения поверхностных свойств составляющей ее твердой фазы не дают возможности установить величины $\operatorname{tg} \varphi_0$ и K_0 . Поэтому возникает необходимость выразить названные величины через непосредственно измеряемые характеристики внутреннего трения. Это можно сделать следующим образом.

Прежде всего необходимо принять во внимание, что, в случае достаточно беспорядочного распределения поверхностей трения по различным

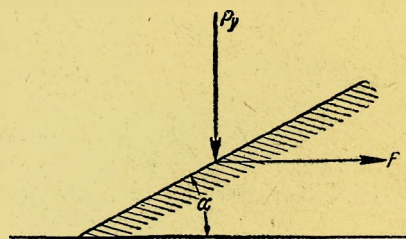


Рис. 22

направлениям, будет одинаковая вероятность встретить площадки как наклоненные в сторону движения, так и против движения. В первом случае сдвигающая сила уменьшает, а во втором — увеличивает трение в одинаковой степени. Поэтому влиянием сдвигающей силы на работу трения можно пренебречь. Впрочем подобное допущение все же не является строгим, потому что возможны явления заклинивания под действием сдвигающей силы, здесь не учтенные.

Пусть трущиеся поверхности соприкасаются по некоторой поверхности, наклоненной под углом α к плоскости сдвига (рис. 22).

Обозначим через F сдвигающую силу, отнесенную к единице поверхности, и через h — величину производимого ею сдвига. Тогда работа сдвига равна:

$$U_2 = Fh. \quad (190)$$

Эту работу можно выразить еще следующим образом:

$$U_2 = \left(P_y \frac{1}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \varphi_0 + K_0 \right) \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{h}{\cos \alpha}. \quad (191)$$

Здесь $\frac{1}{\cos \alpha}$ есть площадь соприкасания, а $\frac{h}{\cos \alpha}$ — величина сдвига в направлении соприкасающихся плоскостей.

Работу, необходимую для поднятия одной частицы для ее перемещения через другие, мы не учитываем потому, что эта работа будет иметь и положительное и отрицательное значения и в общей сумме даст нуль. На основании формул (190) и (191) имеем:

$$\frac{F}{P_y} = \frac{1}{\cos^3 \alpha} \operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{K_0}{P_y}, \quad (192)$$

или, обозначая:

$$\frac{1}{\cos^3 \alpha} = c_M, \quad (193)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = c_V, \quad (194)$$

получаем:

$$\frac{F}{P_y} = c_M \operatorname{tg} \varphi_0 + c_V \frac{K_0}{P_y}. \quad (195)$$

Определяем теперь среднее эффективное значение коэффициентов c_M и c_V способом, аналогичным описанному выше.

На основании формул (193), (177) и (179) получаем среднее значение c_M , равное:

$$c_{M \text{ med}} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha} = 2 \frac{\left| \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha \right|_{\alpha_1}^{\alpha_2}}{\left| \sin^2 \alpha \right|_{\alpha_1}^{\alpha_2}}. \quad (196)$$

Принимая условия (181) и (184) для пределов, находим окончательно:

$$c_{M \text{ med}} = 2,67. \quad (197)$$

Соответствующий результат для среднего значения c_V на основании формул (193), (177) и (179) следующий:

$$c_{V \text{ med}} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{tg} \alpha d\alpha}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha} = 2 \frac{\left| -\ln \cos \alpha \right|_{\alpha_1}^{\alpha_2}}{\left| \sin^2 \alpha \right|_{\alpha_1}^{\alpha_2}}. \quad (198)$$

Если принять и в этом случае условия (181) и (184), то получается:

$$c_{V \text{ med}} = 1,84. \quad (199)$$

Следовательно:

$$\frac{F}{P_y} = 2,67 \operatorname{tg} \varphi_0 + 1,84 \frac{K_0}{P_y}. \quad (200)$$

Можно обозначить:

$$2,67 \operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} \varphi \quad (201)$$

и

$$1,84 \frac{K_0}{P_y} = \frac{K}{P_y}; \quad (202)$$

тогда:

$$\frac{F}{P_y} = \operatorname{tg} \varphi + \frac{K}{P_y}. \quad (203)$$

Если произвести измерение F при двух различных значениях P_y (при очень малом сдвиге, соответствующем смещению частиц при измерении ξ), то можно установить величины $\operatorname{tg} \varphi$ и K . Отсюда можно на основании формул (201) и (202) установить $\operatorname{tg} \varphi_0$ и K_0 , получается:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = 0,375 \operatorname{tg} \varphi \quad (204)$$

и

$$K_0 = 0,544 K. \quad (205)$$

Поэтому формулу (189) можно переписать еще так:

$$\xi = 1 - 0,74 \operatorname{tg} \varphi - 1,52 \frac{K}{P_y}. \quad (206)$$

Необходимо помнить, что величины $\operatorname{tg} \varphi$ и K определяются здесь, как уже указано, при весьма малом сдвиге. Величина этого сдвига может быть легко вычислена. Пусть деформация данного тела при его сжатии, когда определяется ξ , равна Δ и отнесена к единице толщины слоя. Пусть радиус (средний арифметический) частиц — r . Тогда в единице высоты деформированного грунта уместится (приблизленно) $\frac{1}{2r}$ слоев частиц. Смещение в каждом таком слое будет равно:

$$2r\Delta = h. \quad (207)$$

Именно для такого смещения и необходимо знать K и $\operatorname{tg} \varphi$. Если то смещение слишком мало для непосредственного экспериментирования, то можно в первом приближении удовлетвориться интерполяцией между нулем и ближайшими данными опыта.

Таким образом существуют значительные трудности при опытным определении величин $\operatorname{tg} \varphi$ и $\frac{K}{P_y}$ в условиях, соответствующих излагаемой теории. Кроме того и численное значение коэффициентов в формуле (206) соответствует определенным статистическим представлениям о дисперсной системе. Оба эти обстоятельства могут легко привести к тому, что экспериментальные значения ξ , $\operatorname{tg} \varphi$ и $\frac{K}{P_y}$ не будут согласовываться с формулой (206).

Чтобы выйти из подобного затруднения, можно постулировать пропорциональность между требуемыми теорией и определяемыми на опыте величинами $\operatorname{tg} \varphi$ и $\frac{K}{P_y}$. При подобном допущении можно написать:

$$\xi = 1 - c_\omega \operatorname{tg} \varphi - c_\Sigma \frac{K}{P_y}, \quad (208)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} c_\omega &= \text{const}, \\ c_\Sigma &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (209)$$

Численное значение этих постоянных можно определить опытным путем, измеряя $\operatorname{tg} \varphi$ и $\frac{K}{P_y}$ двух тел, существенно различающихся по своим поверхностным свойствам, но достаточно сходных по форме частиц и структуре.

К сожалению экспериментальных данных в этой области получено еще весьма мало, и поэтому трудно опереться на них для проверки и иллюстрации вышеуказанного. Кое-что можно сказать лишь о значении c_ω в случае грунтов. Впрочем здесь близкого сходства формы частиц и структуры в разных случаях, может быть, и нет. На основании многочисленных опытных данных можно принять (приблизительно) следующие величины для водонасыщенных песка и глины (табл. 7).

Таблица 7

Грунт	φ	$\xi = \xi_{\infty}$	$\frac{K}{P_y}$
Песок	37°	0,4	0
Глина	25°	0,7	0

Отсюда получаются следующие значения c_{ω} :

для песка	0,80
для глины	0,64

Среднее 0,72

Эта средняя величина близка к теоретической величине 0,74, но все же меньше. Подобное уменьшение может быть объяснено большим значением случаев с большим углом α при действительном трении в грунтах.

В заключение следует указать на результат сопоставления изложенной здесь теории с опытными данными и расчетами, полученными другим способом. В опубликованной работе, осуществленный мною совместно с Эрлихом, Лашем, Лалетиным и Булычевым¹, приводятся данные о зависимости ξ от P_y .

Во всех случаях получаются графики с кривыми типа ветви гиперболы с асимптотой, соответствующей ξ_{∞} . Это подтверждает теорию, дающую согласно формуле (206) именно такую зависимость.

§ 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ РАВНОМЕРНО ЗАГРУЖЕННОЙ ЛИНИИ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

Как было уже указано, к почвам и грунтам применимы только в известной мере методы теории упругости. В общем случае однако для анализа напряженного состояния дисперсных систем типа грунтов возможны и совсем иные приемы. Для иллюстрации этого рассмотрим здесь простейший случай распределения напряжений². Основное значение этого примера состоит в том, что в нем используется представление о статистической структуре грунта для решения одной из задач распределения напряжений. Здесь затрагивается не столько практически важный случай, сколько новый многообещающий метод.

Пусть имеется равномерно нагруженная линия на поверхности почвы, перпендикулярная к плоскости чертежа (рис. 23). Выделим в почве достаточно тонкий плоско-параллельный слой, перпендикулярный к указанной линии. Пусть средняя толщина этого слоя равна размерам средней частицы или структурного элемента данного грунта или почвы.

¹ «Вестник ВИА» № 6, 1934, стр. 74.

² Г. И. Покровский и А. А. Некрасов, «Вестник ВИА» № 6, 1934.

Пусть сила, действующая на единицу длины загруженной линии, равна p' . Тогда сила, действующая на частицу, равна:

$$dF' = p' dz \quad (210)$$

(ось z перпендикулярна рисунку).

Можно допустить, что загруженная описанным путем частица будет опираться на две других.

Пусть проекция расстояния между соответствующими точками опоры на линию, перпендикулярную направлению p' (рис. 23), равна L . Тогда согласно рис. 23 и на основании известных соотношений статики можно написать:

$$dF'_1 = dF' \frac{(L-x)}{L}. \quad (211)$$

Здесь dF'_1 означает силу, действующую на площадку между верхней и левой нижней частицами, в соответствии с рис. 23.

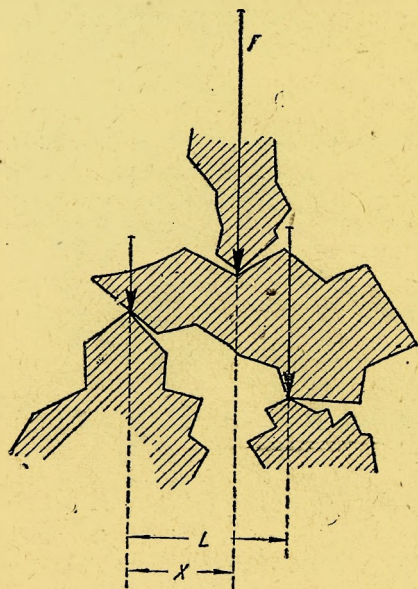


Рис. 23

Переходим теперь к слою грунта толщиной (в направлении плоскости рисунка), равной единице. Соотношение между силой dF , действующей на единицу длины загруженной линии, и силой dF_1 , действующей на полосу шириной dx , находящуюся на некоторой глубине y на расстоянии x от направления F , выразится так:

$$dF_1 = F \left(1 - \frac{x}{L}\right) f(x) dx. \quad (212)$$

Функция $f(x)$ означает следующее. Величины x и L могут быть различны. Если бы x и L имели одно и то же значение для всего слоя толщиной в единицу, то, очевидно, и dF_1 , будучи вполне определенным, могло бы осуществиться только на расстоянии, равном какому-то определенному значению x . Так как однако величины x и L будут различны

у разных частиц, то каждому значению x будет соответствовать сила, пропорциональная вероятности того, что x будет лежать в пределах от x до $x+dx$. Таким образом функция, упомянутая выше, является функцией вероятности.

В большинстве случаев можно допустить, что эта функция имеет форму гауссова закона распределения:

$$f(x) = c_A e^{-c_B(x_0 - x)^2}.$$

Поэтому:

$$dF_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) c_A F e^{-c_B(x_0 - x)^2} dx.$$

Считая множитель $\left(1 - \frac{x}{L}\right)$ некоторой средней эффективной величиной, обозначив

$$c_A F \left(1 - \frac{x}{L}\right) = c_D$$

и полагая, что x_0 — величина достаточно малая, получим окончательно:

$$dF_1 = c_D e^{-c_B x^2} dx. \quad (213)$$

В данном случае можно также утверждать, что давление равно:

$$p' = \frac{dF}{dx}.$$

Поэтому:

$$p' = c_D e^{-c_B x^2}. \quad (214)$$

Если бы мы приняли вместо гауссова распределения какое-либо иное, то, очевидно, этому иному распределению следовала бы и формула (214).

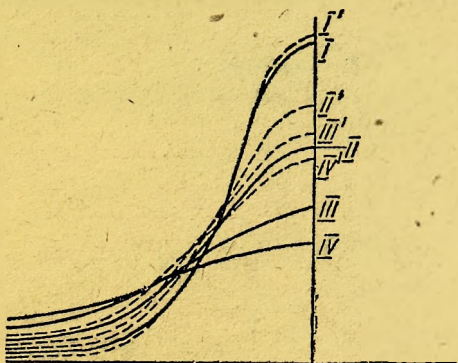


Рис. 24

Из изложенного видно: если размеры частиц или структурных элементов почвы, а также параметры, определяющие их взаимное расположение (в данном случае отношение $\frac{x}{L}$), подчиняются какому-либо определенному закону распределения, то этому же закону должно следовать и распределение давления в почве (в рассматриваемом случае).

Изложенные соображения правильны пока лишь для уровня, находящегося ниже загруженной линии на среднюю высоту частицы (рис. 23). Теперь предстоит доказать, что если гауссово распределение осуществилось на какой-либо глубине, то оно должно осуществляться и на любой иной.

§ 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ ЗАГРУЖЕННОЙ ЛИНИИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ГЛУБИНЫ

Так как по нашему условию измерение в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка (рис. 23), нас не интересует, то, считая его условно единицей, получим для силы F размерность в $кг/см$, а для давления p — в $кг/см^2$.

Сила, действующая на единичной глубине, соответствующей моногранулярному слою, на элементарный участок dx , будет выражаться так:

$$F = p_0 e^{-c_B(x_0 - x_1)^2} dx_1,$$

¹ Г. И. Покровский, О распределении напряжений и деформаций в глинистых грунтах под фундаментами. Государственный институт сооружений, вып. 34, 1931.

так как p_0 имеет размерность в кг/см^2 , а второй множитель есть величина отвлеченная.

Тогда на некоторой новой глубине H эта сила F даст новое распределение давлений, каждое из которых может быть определено по формуле:

$$dp'' = dp' e^{-c'_B(x_1 - x)^2}, \quad (215)$$

так как абсцисса x_1 остается прежней, а точка C лежит на одной ординате с B . Поэтому сила F , действующая на участке dx_1 , должна быть равна общей сумме элементарных давлений, т. е.:

$$p_0 e^{-c_B(x_0 - x_1)^2} dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dp' e^{-c'_B(x_1 - x)^2} dx,$$

где c'_B — новая постоянная.

Считая dp' постоянной, определяем ее:

$$dp' = \frac{p_0 e^{-c_B(x_0 - x_1)^2} dx_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c'_B(x_1 - x)^2} dx}. \quad (216)$$

Для получения давления p в любой точке на глубине H надо интегрировать выражение (216), т. е.:

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c'_B(x_1 - x)^2} dp';$$

принимая во внимание выражение (216), получим для давления p в любой точке на глубине H :

$$p = p_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-c_B(x_0 - x_1)^2} e^{-c'_B(x_1 - x)^2} dx_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c'_B(x_1 - x)^2} dx}.$$

Знаменатель даст в результате:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c'_B(x_1 - x)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c'_B}}.$$

Поэтому получаем:

$$p = p_0 \sqrt{\frac{c'_B}{\pi}} e^{-(c_B x_0^2 + c'_B x^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(c_B + c'_B) x_1^2} e^{2(c_B x_0 + c'_B x) x_1} dx.$$

Обозначая:

$$c_B + c'_B = A;$$

$$c_B x_0 + c'_B x = B;$$

$$p_0 \sqrt{\frac{c_B}{\pi}} e^{-(c_B x_0^2 + c'_B x^2)} = C,$$

получим:

$$p = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax_1^2} e^{2Bx_1} dx_1. \quad (217)$$

Приводя по обычным правилам этот интеграл к виду функции комплексного переменного, получим:

$$p = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax_1^2} i \cos 2B_1 x_1 dx_1 + C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax_1^2} i \sin 2B_1 x_1 dx_1,$$

где $B_1 = Bi$.

Второе слагаемое обращается в нуль, так как при пределах $\pm \infty$ подинтегральная функция нечетная. Для первого же слагаемого получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax_1^2} i \cos 2B_1 x_1 dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax_1^2} \frac{e^{2B_1 x_1} + e^{-2B_1 x_1}}{2} dx_1 = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{A}}.$$

Поэтому выражение (217) принимает вид:

$$p = C \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{A}}.$$

Подставляя обратно вместо A , B , C их значения, получим:

$$p = p_0 \sqrt{\frac{c_B}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{c_B + c'_B}} e^{-(c_B x_0^2 + c'_B x^2)} e^{\frac{(c_B x_0 + c'_B x)^2}{c_B + c'_B}},$$

что и даст окончательно:

$$p = p_0 \sqrt{\frac{c'_B}{c_B + c'_B}} e^{-\frac{c_B c'_B}{c_B + c'_B} (x_0 - x)^2} \quad (218)$$

Эта формула, дающая выражение для давления p на любой глубине H через давление p_0 , т. е. через наибольшее давление на единичной глубине под точкой A действия силы, позволяет легко включить эту глубину H в общую зависимость.

Действительно, приняв для единичной глубины:

$$p_1 = p_0 e^{-c(x_0 - x)^2},$$

получим для пласта на глубине двух единиц:

$$p_2 = p_0 \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-\frac{c}{2} (x_0 - x)^2}$$

и для пласта на глубине H единиц:

$$p = p_0 \sqrt{\frac{1}{H}} e^{-\frac{c}{H}(x_0 - x)^2}$$

Итак, оказывается, что распределение давления выражается функцией одного вида для всех глубин. Это означает, что гауссово распределение должно осуществляться при всякой толщине слоя, если оно осуществлялось при какой-то данной толщине.

Переходя теперь к полосе фундамента шириной $2b$, помещая, как и раньше, начало координат в середине и обозначая во избежание путаницы $x=L$, т. е. принимая, что абсцисса точки, лежащей на некоторой глубине H , соответствует как раз тому давлению, отыскать которое мы желаем, а прежнее x_0 обозначая через переменную интегрирования x , получим:

$$p = p_0 H^{-\frac{1}{2}} \int_{L-b}^{L+b} e^{-\frac{c}{H}(L-x)^2} dx.$$

Вводя обозначение:

$$\frac{c}{H} (L-x)^2 = t^2$$

и, значит,

$$dt = \sqrt{\frac{c}{H}} dx,$$

получим:

$$p = p_A \frac{\int_{\sqrt{\frac{c}{H}(L-b)}}^{\sqrt{\frac{c}{H}(L+b)}} e^{-t^2} dt}{\sqrt{\frac{c}{H}(L-b)}} \quad (219)$$

Для определения физического смысла p_A рассуждаем так.

Гауссова функция $\Phi(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx$ обращается наверное в единицу при $x = \infty$, но по равенству:

$$t = \sqrt{\frac{c}{H}} (L-x)$$

видим, что условие $\Phi(x)=1$ наверное удовлетворяется, когда $H=0$, т. е. при $H=0$ имеем:

$$p = p_A;$$

иначе говоря, p_A есть величина давления на поверхность грунта, что и следовало ожидать.

Исходя из теории упругости, можно также решить задачу распределения напряжения. По указанной теории получаем¹ (табл. 8):

¹ Н. М. Герсеванов и Д. Е. Польшин, «Сборник ВАОС» № 1, 1933.

Значения p , вычисленные на основе теории упругости

$L =$	0	1	2	3	4	Примечание
$H=1$	0,82	0,48	0,084	0,017	0,005	На рис. 24 кривая I
$H=2$	0,55	0,41	0,18	0,07	0,02	» II
$H=3$	0,40	0,33	0,21	0,11	0,06	» III
$H=4$	0,30	0,27	0,20	0,13	0,08	» IV

Откладывая соответствующие значения на осях, получаем сплошные кривые на рис. 24, отнесенные к одной оси абсцисс. Первая кривая дает распределение давлений на глубине, равной единице, вторая — на глубине, равной двум.

На том же рис. 24 показаны пунктиром кривые, соответствующие статистической теории.

Для построения таких кривых при пользовании формулой (219), необходимо вычислять выражения:

$$\Phi \left[\sqrt{\frac{c}{H}} (L + b) \right] - \Phi \left[\sqrt{\frac{c}{H}} (L - b) \right].$$

Составляем табл. 9 (пользуясь Jahnke und Emde «Funktionentafeln»), помня, что множитель $\frac{2}{4\pi}$, стоящий перед интегралом, в формуле (219) может быть объединен с другими величинами в константе p_A .

Таблица 9

Значения гауссовой функции $\Phi(x)$ при $c=1$

$L =$	0	1	2	3	4	Примечание
$H=1$	0,84	0,49	0,08	0,004	0	На рис. 24 кривая I'
$H=2$	0,66	0,47	0,15	0,03	0	То же II'
$H=3$	0,59	0,45	0,18	0,04	0,009	» III'
$H=4$	0,52	0,42	0,21	0,09	0,01	» IV'

Значение b , как и раньше, принимается за единицу; p_A также принимаем равным единице.

В целях подбора константы c возможно ближе к таблице, вычисленной по формуле (219), составляем табл. 10 при $c=0,9$.

Далее определяем соответствующие значения при константе $c=0,7$; 0,5; 0,3 (табл. 11, 12 и 13).

На рис. 25 представлены кривые зависимости давления p от глубины H при одной и той же абсциссе, т. е. для точек, расположенных вертикально одна под другой. Сплошные кривые соответствуют теории упругости, пунктир — статистической теории. Мы видим, что, если исхо-

Таблица 10

Значения $\Phi(x)$ при $c = 0,9$

$L =$	0	1	2	3	4
$H = 1$	0,82	0,49	0,08	0,01	0
$H = 2$	0,66	0,47	0,16	0,08	0,01
$H = 3$	0,56	0,43	0,21	0,12	0,02
$H = 4$	0,45	0,41	0,23	0,18	0,02

Таблица 11

Значения $\Phi(x)$ при $c = 0,7$

$L =$	0	1	2	3	4
$H = 1$	0,76	0,49	0,11	0,01	0,001
$H = 2$	0,59	0,45	0,19	0,05	0,01
$H = 3$	0,50	0,41	0,23	0,09	0,02
$H = 4$	0,44	0,38	0,24	0,11	0,04

Таблица 12

Значения $\Phi(x)$ при $c = 0,5$

$L =$	0	1	2	3	4
$H = 1$	0,68	0,47	0,16	0,02	0,002
$H = 2$	0,52	0,41	0,28	0,08	0,01
$H = 3$	0,42	0,36	0,24	0,12	0,04
$H = 4$	0,38	0,34	0,24	0,13	0,07

Таблица 13

Значения $\Phi(x)$ при $c = 0,3$

$L =$	0	1	2	3	4
$H = 1$	0,56	0,44	0,21	0,05	0,01
$H = 2$	0,41	0,36	0,19	0,11	0,04
$H = 3$	0,35	0,31	0,23	0,13	0,08
$H = 4$	0,30	0,28	0,22	0,15	0,09

дить из теории упругости, величина давления в общем резче убывает при увеличении глубины. Иначе говоря, кривые давлений на равной глубине под нагрузкой должны быть более плавными при пользовании методом теории упругости.

Для проверки преимущественной приемлемости того или другого метода следует обратиться к анализу имеющихся экспериментальных кри-

вых распределения давлений. История вопроса¹ дает возможность использовать кривые Штрошнейдера², не вполне впрочем подходящие к данному случаю. Исследования Кеглера для плоской задачи к сожалению также совершенно неприменимы: в них давление производится на круглую пластинку³. Кривые Гольдбека⁴ также относятся к круглой пластинке. Приемлемыми оказываются только исследования Пенсильванской высшей школы⁵.

На рис. 26 показаны эти экспериментальные кривые (сплошными линиями) для глубины 22,5 см (1,5b) и 30 см (2b). Нагрузка p_0 менялась от 0,3 до 0,5 кг/см², плита представляла квадрат со стороной 30 см. Конечно незначительность длины дает нам условия, мало подходящие для плоской задачи.

Приведем еще сравнение данных статистической теории и теории упругости с экспериментальными результатами, полученными методом измерения давлений при помощи изменения емкости конденсатора⁶. На рис. 27 представлена экспериментальная кривая, полученная при давлении $P_A = 0,53$ кг/см² на жесткую плиту размерами 25 × 15 см на глубине 9 см.

Конечно, все эти кривые весьма далеки от условий, требуемых плоской задачей. Вопрос о лучшем совпадении той иной кривой с данными эксперимента может считаться близким к разрешению только в том случае, если будут получены надежные экспериментальные кривые, полученные при соблюдении требований, удовлетворяющих плоской задаче. В первую очередь конечно необходимо выполнение основного условия: длина нагруженной плиты должна быть достаточно велика и во всяком случае должна быть больше глубины тех точек, в которых будет испытываться давление.

Кроме того необходимо, чтобы при экспериментировании измерения напряжений производились на достаточном расстоянии от более или менее жесткого дна, подстилающего грунт.

Опыты, проделанные И. С. Федоровым в ВАОС и А. Я. Медведевым в Фундаментстрое, более других удовлетворяют этим требованиям.

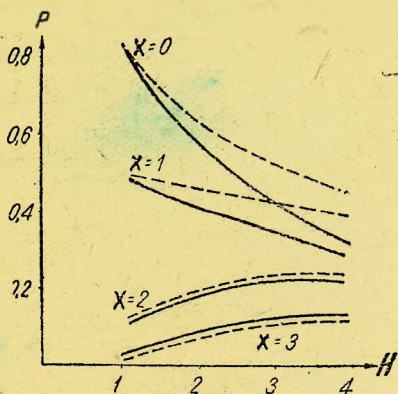


Рис. 25

¹ Heinrich Press, Druckverteilung im Baugrunde, «Bauingen.» 29, Heft 32; также Kögler und Scheidig, Druckverteilung im Baugrunde, «Bautechn.» 27, Heft 29) и. 31.

² «Sitzungsberichte der K. u. K. Akad. der Wissensch.», Bd. 121 Wien 1911.

³ Cp. Kögler, Die Belastung des Baugrundes «Bauingen.» 27, Heft 44; Van Stersson, Theorie der Gründung auf Böden, «Bauingen.» 28, Heft 47 и. 48.

⁴ Goldbeck and Smith, An apparatus for determ. Soil pressure, «Am. Soc. test. Mat.», 1916, стр. 309.

⁵ «Org. für Fortsch. d. Eisenb.», 1915.

⁶ И. В. Лалетин, Электрический способ измерения давлений, Государственный институт сооружений, сообщение 34, 1931, стр. 12.

Согласно опытам Федорова затухание напряжений при увеличении глубины, получающееся из опытов (проделанных на центрифуге, моделирующей все условия в грунте в соответствии с натурой¹, и в полевых условиях), оказывается меньшим, чем требует теория упругости². Лабораторные опыты Медведева в Водгео показали, что данные эксперимента лежат примерно в середине между результатами, полученные по статистической теории и по теории упругости. Несмотря на довольно большое количество различных экспериментов, в настоящее время еще нельзя считать этот вопрос решенным окончательно.

Итак, предоставляя эксперименту последнее слово о большей или меньшей практической пригодности рассмотренных здесь теоретических

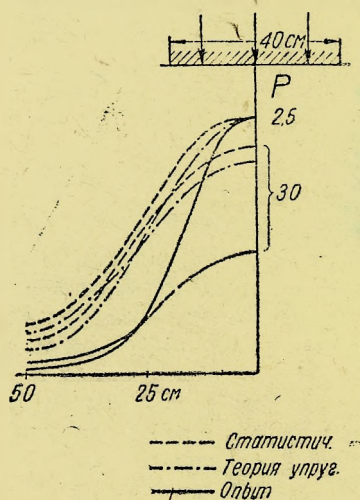


Рис. 26

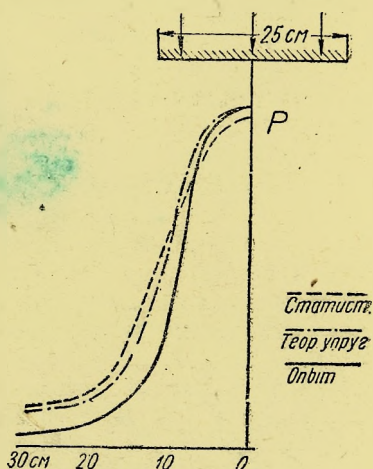


Рис. 27

предпосылок, все же можно и сейчас предугадать, что применение статистического метода дает более надежное средство для вычислений как в отношении наибольшей безопасности полученных величин (так как статистическая кривая дает более медленное уменьшение давлений), так и в отношении более гибкой применимости к особенностям грунта, которые могут учитываться константой c — большей для песков и меньшей для глин.

§ 9. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ДИНАМИКЕ ПОЧВ И ГРУНТОВ

Все рассмотренные до сих пор соотношения не являются правильными, если их рассматривать вне зависимости от времени. Поскольку мы применяем к грунтам статистические закономерности, оказывается также необходимым учесть связь между статистикой любой физической системы и термодинамикой. Эта связь имеет тот основной смысл, что вероятность

¹ Г. И. Покровский, Центробежное моделирование, 1935.

² G. I. Pokrowski, I. S. Fedorow, «Technical Physics», 1935.

состояния любой системы зависит от ее потенциальной энергии. При этом чем больше названная энергия, тем меньше соответствующая вероятность. Но чем меньше вероятность, тем скорее данная система перейдет в другое, более устойчивое состояние.

Из сказанного вытекает, что любая система будет находиться всегда в состоянии движения, переходя от состояний менее вероятных к более вероятным и освобождая при этом потенциальную энергию. Таким образом все соотношения, рассмотренные выше, имеют смысл лишь для некоторого определенного момента времени и практически могут быть применимы только после достаточно длительного действия силы, когда состояние грунта достаточно стабилизировалось.

Однако прежде чем перейти к рассмотрению основных положений, необходимо также рассмотреть некоторые простейшие случаи приложения статистики к динамике почв, не имеющие прямого отношения к термодинамике. Это и будет сделано в следующих параграфах.

§ 10. ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ К ЯВЛЕНИЮ ТРЕНИЯ В ГРУНТАХ

Трение в почвах является, как уже сказано было выше, основным фактором, определяющим ее прочность. Поэтому неудивительно, что теоретическому и экспериментальному изучению этого явления посвящено, начиная с Кулона¹, немало различных работ. Тем не менее мы не только не имеем до настоящего времени теории этого явления, разработанной в такой степени, чтобы дать ясную картину хотя бы основных свойств трения, но даже не имеем общепринятого и практически удовлетворительного способа измерения коэффициента внутреннего трения в грунтах. Поэтому часто при инженерных расчетах приходится довольствоваться весьма приближенными данными и вводить значительные коэффициенты запаса, что очень заметно удорожает строительство.

Существенным прогрессом теории трения в почвах и грунтах было бы установление зависимости между величинами, характеризующими это трение в условиях больших сооружений, и величинами, определенными путем тех или иных лабораторных и полевых экспериментов. Такую зависимость представляется возможным установить однако лишь при рассмотрении трения со статистической точки зрения².

Действительно, суммарная сила трения, необходимая для смещения некоторой части грунта, складывается из отдельных сил взаимодействия между частицами и между структурными элементами этого грунта. Несомненно, что силы, действующие между разными частицами, могут быть весьма разнообразны, и теоретически было бы совершенно бесплодно стремиться к детальному анализу всех возможных здесь индивидуальных случаев. Практически нам приходится иметь дело с такими видами трения, когда взаимодействует очень много отдельных элементов грунта и общая сила складывается из элементарных сил по обычным статистическим законам. Таким образом трение в грунтах нужно рассматривать практически как явление статистическое, зависящее от числа взаимодействую-

¹ Coulomb, *Théorie des machines simples*, 1781.

² Г. И. Покровский, «Журн. техн. физики» № 3, 1933.

щих частиц и уже поэтому не могущее протекать одинаково в действительности и на лабораторной модели малых размеров, хотя бы все остальные источники ошибок и искажений были совершенно исключены.

Для количественного описания трения с указанной точки зрения рассмотрим детально зависимость силы трения от величины смещения. Пусть некоторый массив грунта (рис. 28) разделен горизонтальной плоскостью на две части, сжатые вертикальной силой F_y и сдвигаемые одна относительно другой силами F_x . Обозначим величину сдвига через Δ .

При очень малых значениях Δ можно утверждать, что сила, действующая на элемент поверхности, расположенный около плоскости среза, будет пропорциональна Δ . Обозначив эту силу через F_N , получаем:

$$F_N = c_N \Delta, \quad (220)$$

где $c_N = \text{const.}$

Индекс N означает, что данное соотношение справедливо лишь для какой-то элементарной площадки, обозначенной условно номером N . Таким образом для всей силы F мы получаем:

$$F = \Sigma F_N = \Sigma c_N \Delta = (\Sigma c_N) \Delta. \quad (221)$$

Величина $(\Sigma c_N) = c_S$ может считаться в каждом данном случае постоянной, чем больше число частиц, принимающих участие в описанном

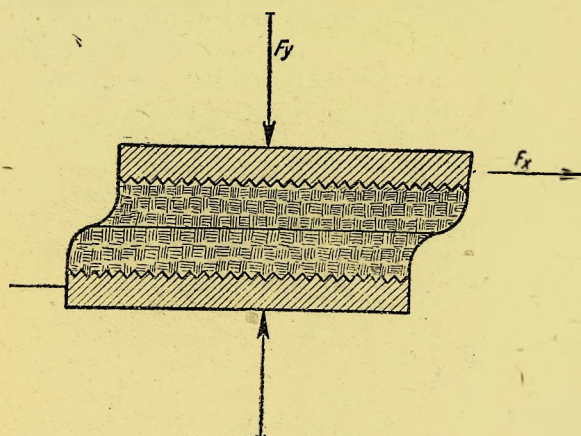


Рис. 28

взаимодействии, т. е. чем мелкозернистее грунт или чем больше площадь трения, тем ближе будет c_S к некоторому своему среднему значению (полученному из большого числа опытов).

При дальнейшем возрастании Δ связи между отдельными частицами начнут постепенно нарушаться, благодаря чему дальнейший рост силы F прекратится. При очень

больших значениях Δ количество разрывов и вновь образующихся связей в первом приближении должно оставаться постоянным для каждого данного интервала изменения Δ . Поэтому и среднее значение F должно при больших Δ стать тоже постоянным. Таким образом сила трения, возрастая вначале, должна при больших значениях асимптотически приближаться к некоторой постоянной величине. Однако эту последнюю величину нельзя считать строго постоянной. Дело в том, что при больших величинах сдвига структура трущихся поверхностей будет изменяться. Будут происходить вообще уплотнение и взаимная «отшлифовка» трущихся частей грунта, что будет в свою очередь сопровождаться уменьшением силы F . Проследим указанные взаимоотношения количест-

венно. Для этого временно допустим, что трение происходит на очень большой площади и отдельные элементы, обуславливающие трение, можно считать бесконечно малыми. В таком случае можно не останавливаться на статистических колебаниях рассматриваемых величин и прямо определить их среднее значение.

Обозначим через N_0 то среднее число точек взаимодействия в плоскости сдвига, которое осуществляется при достаточно большом Δ . Тогда можно утверждать, что в среднем количество вновь возникающих точек взаимодействия должно быть пропорционально увеличению Δ и разности между N_0 и данным числом точек взаимодействия N . Поэтому можно написать:

$$dN = c(N_0 - N)d\Delta, \quad (222)$$

где $c = \text{const}$.

Интегрируя приведенное выражение, получаем:

$$N = N_0 - Ce^{-c\Delta}, \quad (223)$$

где $C = \text{const}$.

Чтобы определить величину C , необходимо знать число точек взаимодействия при $\Delta = 0$. Но такой случай возможен лишь при $F = 0$, т. е. при отсутствии сдвигающей силы. Можно допустить, что в этом случае $N = 0$ (так как если нет силы, то не может быть и ни одной точки, в которой было бы взаимодействие, возможное лишь при наличии названной силы). Отсюда получаем, что:

$$C = N_0$$

и

$$N = N_0(1 - e^{-c\Delta}). \quad (224)$$

Величина N_0 , входящая в данное уравнение, может считаться постоянной условно, поскольку неизменна структура грунта около поверхности сдвига. Однако это бывает обычно не так, и необходимо учесть соответствующее изменение N_0 . Число точек взаимодействия можно разбить на две части:

$$N_0 = N_0' + N'', \quad (225)$$

причем N_0' обозначает то число точек, которое не подвергается изменению при изменении структуры грунта. N'' может в противоположность ему уменьшаться при уплотнении и «шлифовке» плоскости сдвига.

Можно допустить, что уменьшение N'' пропорционально деформации сдвига и числу тех точек взаимодействия, которые могут исчезнуть в результате деформации. Таким образом мы получаем:

$$-dN'' = c_b N'' d\Delta, \quad (226)$$

где $c_b = \text{const}$.

Интегрируя это выражение, можем написать:

$$N'' = N_0'' e^{-c_b \Delta}, \quad (227)$$

где N_0'' — первоначальное значение при $\Delta = 0$. Это значение будет, очевидно, особенно большим в случае малоуплотненного грунта, обладающего большими силами сцепления.

Из уравнений (224), (225) и (227) получаем:

$$N = (N_0'' e^{-c_b \Delta} + N_0) (1 - e^{-c \Delta}). \quad (228)$$

Так как сила трения должна быть в рассматриваемом случае пропорциональна числу точек взаимодействия N , то можно также написать:

$$F = (c_1 e^{-c_b \Delta} + c_2) (1 - e^{-c \Delta}), \quad (229)$$

где c_1 и c_2 — постоянные коэффициенты, которые необходимо находить опытным путем, так как теоретически их определить пока невозможно. Впрочем значение формулы (229) заключается преимущественно не в том, чтобы численно определить F в конкретном случае. Гораздо важнее, что указанная формула определяет общий характер явления, который должен в большей или меньшей степени осуществляться при любых условиях. Этот общий характер зависимости F от Δ показан на рис. 29. Изображенная здесь графически связь между силой трения F и смещением Δ

указывает на существование двух стадий сдвига. При первой стадии:

$$\frac{dF}{d\Delta} > 0,$$

т. е. сила растет при увеличении деформации, и при второй:

$$\frac{dF}{d\Delta} < 0.$$

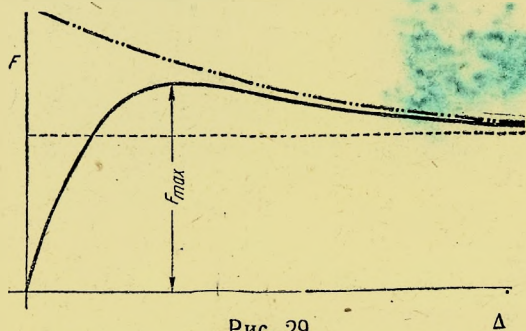


Рис. 29

Очевидно, что граница между этими стадиями и определяет собой момент «разрушения» грунта в результате сдвига. Соответствующую величину силы F_{\max} и следует принимать за «силу трения» при данном эксперименте.

Все приведенные до сих пор рассуждения справедливы, как уже указывалось, только в том случае, когда отдельные элементы трущихся поверхностей бесконечно малы. Если же размеры этих элементов не бесконечно малы по сравнению с размерами плоскости сдвига, то необходимо внести ряд дополнений. Прежде всего нужно подчеркнуть, что в этом случае сила трения не будет точно определена приведенными раньше формулами.

Истинное значение силы трения, получаемое в каждый данный момент, будет вообще отличаться на неопределенную величину от теоретической нормы. Таким образом если сопоставить теоретическую кривую зависимости между F и Δ с тем, что должен давать эксперимент, то мы получим картину, данную на рис. 30. Здесь экспериментальная кривая колеблется около теоретической. Относительно амплитуды каждого отдельного колебания нельзя сказать ничего определенного. Однако среднее значение указанных отклонений может быть легко определено на основании теории вероятности.

Зависимость подобного характера легко может быть получена экспе-

риментально. Здесь можно указать на работы Пигулевского¹ и лаборатории фундаментов ВИА².

Обозначим через F_1 действительное значение силы трения в какой-либо момент сдвига и через F — соответствующую этому значению теоретическую величину. Их разность равна:

$$F_{\Delta} = F_1 - F.$$

Если величину F_{Δ} определить при данных условиях N раз и взять среднее квадратичное значение разности:

$$F_{\text{med}} = \pm \sqrt{\frac{\sum F_{\Delta}^2}{N}}, \quad (230)$$

то можно утверждать, что, при достаточно большом N ,

$$F_{\text{med}} = \pm F \cdot \sqrt{\frac{1}{N_0}}, \quad (231)$$

где N_0 — число структурных элементов на плоскости сдвига.

Если считать, что смещение одной массы почвы относительно другой происходит достаточно медленно и можно пренебречь кинетической энергией движущихся масс, то для действительного сдвига будет в среднем необходима сила:

$$F_1 = F + F_{\text{med}}; \quad (232)$$

и перед разрушением почвы установится такая деформация Δ , при которой действительная сила трения непременно больше теоретического значения.

Поэтому, хотя в формулах (230) и (231) F_{med} может иметь одинаково как положительное, так и отрицательное значение, в формуле (232) надо брать F_{med} всегда со знаком плюс.

Величина N в формуле (231) зависит от объема почвы, подвергающейся деформации при сдвиге. Если обозначить деформируемый объем через V и соответствующий эффективный диаметр частиц через D , то можно написать:

$$N_0 = \frac{V}{c_p D^3}, \quad (233)$$

где c_p является коэффициентом, указывающим, сколько отдельных частиц образует в среднем один структурный элемент почвы.

Очевидно, что чем больше силы сцепления между отдельными частицами, тем больше c_p . Поэтому c_p можно назвать «коэффициентом связ-

¹ П. Х. Пигулевский, «Почвоведение». № 1, 1936; Н. Ф. Мищенко Об изучении внутреннего трения в раздельночастичных комплексах, ВАСХНИЛ, 1933.

² «Вестник ВИА», № 6, 1934.

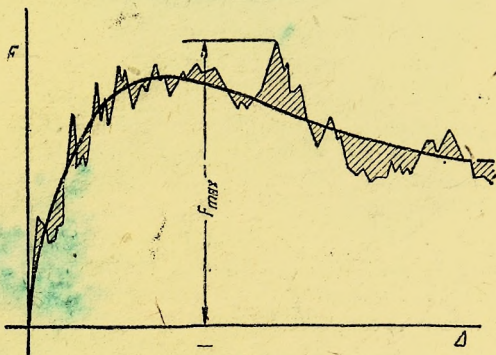


Рис. 30

ности» почвы. Кроме того c_p зависит от формы частиц и пористости грунта. Исходя из формул (231), (232) и (233), можно написать:

$$F_1 = F \left(1 + \sqrt{\frac{c_p D^3}{V}} \right). \quad (234)$$

Из этой формулы видно, что при уменьшении объема образца грунта, подвергающегося деформации, и увеличении эффективного диаметра частиц сила трения должна все более и более уклоняться от значения F и возрастать на значительные величины. Особенно заметный в этом отношении эффект должен получиться в приборе системы Пузыревского, где плоскость сдвига точно фиксирована срезающими грунт приспособлениями. Поэтому не подлежит сомнению, что систематические опыты с прибором Пузыревского должны дать весьма наглядную иллюстрацию зависимости, представленной в формуле (234).

При этом весьма существенно вместо загрузки сдвигающегося приспособления каким-либо грузом перемещать его с весьма малой постоянной скоростью при помощи часового механизма или иного аппарата. Силу F_1 при этом следует измерять динамометром. Лучше всего применять регистрирующий динамометр, который дает зависимость между F_1 и сдвигом Δ , подобную указанной на рис. 30. По такой кривой, полученной экспериментально, можно, с одной стороны, определить величину F и, с другой, — зная величину среднего квадратичного колебания F_{med} , судить о средней величине частиц согласно формулам (231) и (233).

Таким образом теоретически вполне возможно на основании одного лишь опыта судить как о силах трения, так и о величине частиц в данной почве.

Исходя из вышеизложенных соображений, можно установить также количественную зависимость между скоростью движения и силой трения. Обозначим скорость движения через v и движущуюся массу грунта через M . Тогда кинетическая энергия будет равна $\frac{Mv^2}{2}$ и сила торможения на некотором участке пути смещения Δ_1 — равна $\frac{Mv^2}{2\Delta_1}$.

Если вместо Δ_1 взять среднее значение пути смещения Δ_{med} , при котором избыточная сила равна среднему своему значению F_{med} , то можно утверждать, что эта избыточная сила будет тратиться на торможение движущейся массы. Поэтому можно написать:

$$F_1 = F \left(1 + \sqrt{\frac{c_p D^3}{V}} - \frac{Mv^2}{2\Delta_{med}} \right). \quad (235)$$

Эта формула останется справедливой лишь до тех пор, пока

$$\sqrt{\frac{c_p D^3}{V}} \geq \frac{Mv^2}{2\Delta_{med}},$$

т. е. пока

$$v \leq \pm \sqrt{\frac{2\Delta_{med}}{M} \sqrt{\frac{c_p D^3}{V}}}. \quad (236)$$

При больших скоростях F_1 не будет отличаться от F . Общий характер зависимости между v и F_1 согласно формулам (235) и (236) дан на рис. 31.

Особенно большое значение статистический характер трения в почвах и грунтах имеет в случае вибраций, изменяющих (хотя бы и незначительно) структуру. Вследствие этих изменений сила трения будет принимать последовательно разнообразные значения, в большей или меньшей степени отличные от F . Если считать, что всякие систематические искажающие воздействия исключены, то можно здесь применить закон распределения Гаусса.

Согласно этому закону вероятность dW того, что значение силы трения будет лежать в пределах между F_1 и $F_1 + dF_1$ определяется так:

$$dW = \frac{1}{\sqrt{2\pi F_{\text{med}}^2}} e^{-\frac{(F_1 - F)^2}{2F_{\text{med}}^2}} dF_1. \quad (237)$$

Согласно этой формуле возможны любые значения силы трения F_1 хотя бы и много меньшие, чем средняя величина F . Поэтому в случае вибраций, так или иначе действующих на грунт, существует некоторая определенная вероятность, что F_1 окажется меньше некоторой данной величины F_2 , которая в свою очередь меньше F . Эта вероятность равна:

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi F_{\text{med}}^2}} \int_0^{F_2} e^{-\frac{(F_1 - F)^2}{2F_{\text{med}}^2}} dF_1. \quad (238)$$

Число различных расположений частиц, получающихся в соответствующей части грунта за некоторый промежуток времени, можно считать пропорциональным энергии колебаний U , прошедшей через данный объем грунта. Умножая v на W_2 , получим число таких случаев, при которых сила F_2 может произвести перемещение грунта. Пусть средняя величина такого перемещения будет Δ_n ; тогда, очевидно, весь пройденный при действии силы F_2 путь будет равен:

$$\Delta_2 = c_k U W_2 \Delta_n, \quad (239)$$

где c_k — коэффициент пропорциональности.

Скорость движения v_2 , получающуюся при указанных условиях, можно найти, продифференцировав выражение (239) по времени:

$$v_2 = \frac{d\Delta_2}{d\tau} = c_k W_2 \Delta_n \frac{dU}{d\tau}. \quad (240)$$

$\frac{dU}{d\tau}$, очевидно, равно мощности колебаний. Таким образом скорость деформации при смещении одной части грунта по другой должна быть пропорциональна мощности колебаний, проходящих через зону дефор-

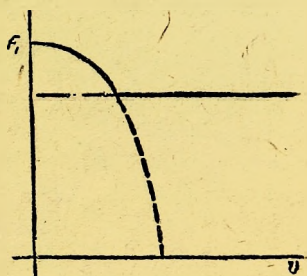


Рис. 31

мации. Необходимо подчеркнуть, что соотношения (239) и (240) справедливы лишь до тех пор, пока:

$$F_2 < F \left(1 + \sqrt{\frac{c_p D^3}{V}} - \frac{M v_2^2}{2 \Delta_{\text{med}}} \right), \quad (241)$$

т. е. пока сила F_2 меньше той величины, которая необходима для движения без наличия вибраций согласно формуле (235). Если же

$$F_2 > F \left(1 + \sqrt{\frac{c_p D^3}{V}} - \frac{M v_2^2}{2 \Delta_{\text{med}}} \right), \quad (242)$$

то скорость может быть бесконечно большой. Обозначим:

$$c_k \Delta_n = c_s.$$

Вводя в формулу (240) значение W_2 из формулы (238), получаем окончательно:

$$v_2 = c_s \frac{dU}{d\tau} c \frac{1}{\sqrt{2\pi F_{\text{med}}^2}} \int_0^{F_2} e^{-\frac{(F_1 - F)^2}{2F_{\text{med}}^2}} dF_1. \quad (243)$$

Зависимость¹ между F_2 и v_2 изображена согласно соотношениям (235) и (243) на рис. 32. При этом кривая 1 соответствует формуле (243) и кривая 2 — формуле (235).

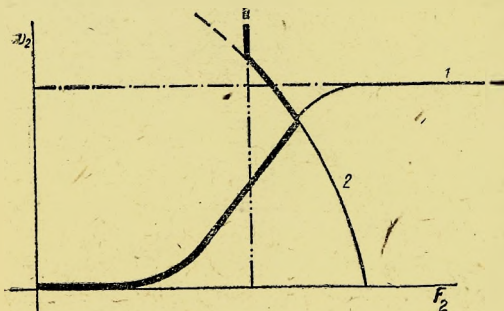


Рис. 32

Соотношения, весьма сходные с только что описанными, получаются в случае, если сдвигающая часть почвы претерпевает осадку в направлении, перпендикулярном силе смещения. В этом случае можно также применить формулы (239) и (240). Здесь величина U будет обуславливаться осадкой Δ_1 почвы и будет пропорциональна этой осадке. Поэтому можно написать:

$$\Delta_2 = c_{s2} W_2 \Delta_1,$$

где c_{s2} — соответствующая постоянная.

Все приведенные в этом параграфе рассуждения касались силы трения. Чтобы перейти к коэффициенту трения, необходимо, как известно, разделить силу трения на силу, перпендикулярную к плоскости сдвига и состоящую обычно из силы внешнего воздействия (например тяжести) и силы сцепления. Из всего сказанного видно, что получающийся таким

¹ Значения интеграла в формуле (243) взяты для построения кривой из книги Jahneke und Emde, Funktionentafeln.

путем коэффициент трения не является величиной постоянной, но зависит от условий эксперимента. Поэтому, указывая то или иное численное значение, необходимо также указать и условия его определения.

§ 11. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О ВЛИЯНИИ ВИБРАЦИЙ НА ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ В ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ

Кроме изложенных выше соображений о влиянии вибраций на внутреннее трение в почвах можно высказать еще следующие соображения.

Пусть дана дисперсная система типа сыпучего тела. Предположим, что одна ее часть сдвигается относительно другой по определенной поверхности сдвига. Таким образом зона деформаций ограничивается довольно тонким слоем, расположенным по обе стороны от этой поверхности. В указанной зоне происходят, во-первых, трение одних элементов о другие и, во-вторых, различные структурные изменения вплоть до разрушения отдельных элементов. Допустим, что общая сила, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу, равна единице. Тогда, очевидно, сдвигающая сила будет равна коэффициенту внутреннего трения k для данной системы. Эта величина будет состоять из двух частей: первая — k_1 — представляет собой трение скольжения для данного материала; вторая — k_2 — представляет силу, обуславливающую изменение структуры деформируемого слоя. Итак, можно написать:

$$k = k_1 + k_2. \quad (244)$$

Предположим теперь, что для осуществления разрушения структуры необходим некоторый достаточно прочный контакт между частицами. При этом в среднем требуется сдвиг величиной L , чтобы такой контакт разрушился, а сила сопротивления предполагается пропорциональной сдвигу. Величина k_2 должна быть, очевидно, также пропорциональна средней величине сдвига.

Перейдем теперь к случаю, когда на рассмотренную нами систему действуют вибрации, причем амплитуда составляет угол α с направлением сдвига. Средняя скорость движения одних частиц относительно других, обуславливаемая вибрациями, должна быть равна $A\nu$, где A — амплитуда и ν — частота вибраций.

Угол α_1 между направлением сдвигающей силы и направлением результирующего движения получится:

$$\alpha_1 = \arctg \frac{A\nu \sin \alpha}{v + A\nu \cos \alpha}, \quad (245)$$

где v — скорость сдвига.

Таким образом величина сдвига в направлении v будет уже не L , но:

$$x = L \cos \alpha_1$$

или согласно формуле (245):

$$x = \frac{L}{\sqrt{\left(\frac{A\nu \sin \alpha}{A\nu \cos \alpha + v}\right)^2 + 1}}. \quad (246)$$

Выражение (246) однако не совсем точное. Для его полной правильности необходимо учесть среднюю арифметическую скорость теплового движения, равную:

$$v_0 = c \sqrt{\frac{Nk_0 T}{M}},$$

где T — абсолютная температура;

$k_0 = 1,37 \cdot 10^{-16}$ CGS (постоянная Больцмана);

M — масса одного элемента дисперсной системы;

c — некоторая постоянная, зависящая от распределения скорости и обычно близкая к единице;

N — число степеней свободы каждого элемента.

Отсюда получается:

$$x = \frac{L}{\sqrt{\left(\frac{Av \sin \alpha + c \sqrt{\frac{Nk_0 T}{M}}}{Av \cos \alpha + v + c \sqrt{\frac{Nk_0 T}{M}}} \right)^2 + 1}}. \quad (247)$$

Величина k_2 , как уже сказано ранее [формула (244)], пропорциональна среднему сдвигу — в данном случае x , поэтому можно написать:

$$k = k_1 + \frac{C_B}{\sqrt{\left(\frac{Av \sin \alpha + c \sqrt{\frac{Nk_0 T}{M}}}{Av \cos \alpha + v + c \sqrt{\frac{Nk_0 T}{M}}} \right)^2 + 1}}. \quad (248)$$

Если $v = 0$ (или очень близко к нему) и $Av = 0$, то коэффициент трения приобретает специфическое значение, равное k_p («трение покоя»). Легко показать, что постоянная C_B выражается так:

$$C_B = \sqrt{2} (k_p - k_1).$$

Поэтому:

$$k = k_1 + \frac{\sqrt{2} (k_p - k_1)}{\sqrt{\left(\frac{Av \sin \alpha + c \sqrt{\frac{Nk_0 T}{M}}}{Av \cos \alpha + v + c \sqrt{\frac{Nk_0 T}{M}}} \right)^2 + 1}}. \quad (249)$$

Нетрудно доказать, что в случае, если колебания совершаются по достаточно сложному закону и все направления равновероятны, величина k должна, постепенно уменьшаясь с возрастанием Av , приближаться к k_p . Такое уменьшение коэффициента трения легко может быть получено экспериментально.

Для иллюстрации возьмем материал, полученный инж. Ф. Л. Лашем в лаборатории оснований и фундаментов Военно-инженерной академии¹

¹ Соответствующая статья печатается в трудах ВИА.

на приборе с кольцевым штампом¹. К этому прибору для целей данного экспериментирования был прикреплен небольшой вибратор. Величина амплитуды измерялась при помощи измерительного микроскопа, установленного независимо от прибора. Исследования произведены с мелкозернистым песком в воздушно-сухом (рис. 34) и водонасыщенном состоянии (рис. 33). Как видно из графиков, общий характер явления вполне соответствует теории, изложенной выше, хотя и не дает еще возможности судить о всех ее деталях.

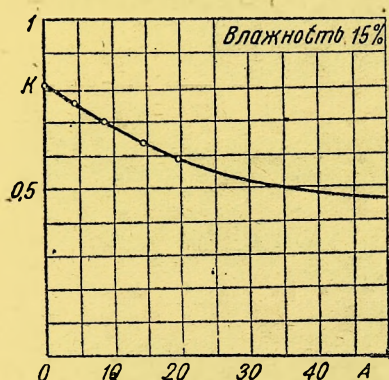


Рис. 33

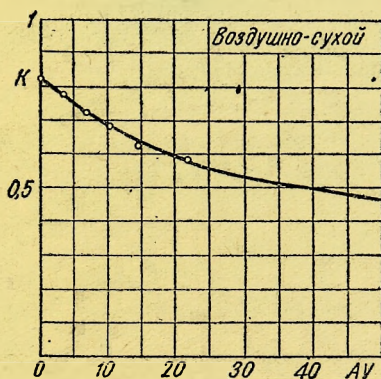


Рис. 34

Как видно из кривых, а также из формулы (249), можно, увеличивая амплитуду вибраций, приближать экспериментально необходимое значение коэффициента трения к величине k_p . Это имеет большое значение в тех случаях, когда необходимо дать для практического расчета надежное число.

§ 12. ВЛИЯНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ ПРИ СДВИГЕ НА КОЭФИЦИЕНТ (УГОЛ) ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Базируясь на опытах, проведенных с песками на приборе типа Крея в гидротехнической лаборатории ЛИИПС², а также на опытах на скашивании, проведенных в ВАОС³, можно заключить, что при деформации сдвига (подверженной одновременно действию сжимающей и сдвигающей сил) или при скашивании до момента разрушения образца грунта происходит уплотнение грунта, а после «разрушения» при сдвиге и некоторое разрыхление его.

Увеличение плотности влажных грунтов при сдвиге должно приводить к выжиманию излишней воды из пор грунта. Но вследствие того, что коэффициент фильтрации глинистых грунтов очень мал и время испытания также мало, излишняя вода не в состоянии продвинуться к поверхности

¹ Г. И. Покровский, «Журн. техн. физики» № 3, 1934.

² Инж. И. В. Яропольский, Теоретические обоснования глубины заложения фундаментов.

³ Г. И. Покровский, О скашивании, «Сборник ВАОС» № 1.

Г. И. Покровский и И. В. Федоров. Журн. «Техн. физики» № 6, 1936.

образца грунта; часть нагрузки, а в некоторых случаях даже и вся нагрузка воспримется водой, создав внутри некоторый напорный градиент (гидродинамическое давление) и тем самым уменьшив коэффициент внутреннего трения грунта.

Изменение пористости в грунте при сдвиге или скашивании можно проиллюстрировать на довольно простой схеме, рассмотрев при этом гипотетический грунт, состоящий из системы шаров, расположенных в таком порядке, как указано на рис. 35, а. При скашивании или сдвиге шаров произойдет перемещение центра тяжести частиц шаров, причем объем, занятый шарами, изменится (рис. 35, б). Общая величина уменьшения объема системы шаров и составит изменение пористости гипотетического грунта, величину которой можно подсчитать для данной схемы, прибегая

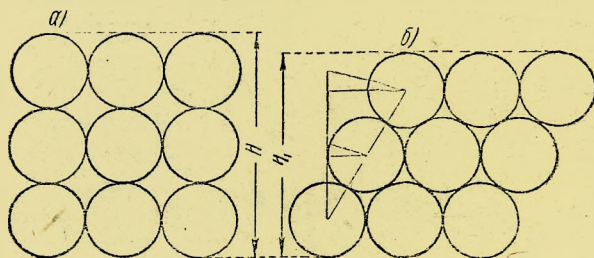


Рис. 35

к геометрическим соображениям и к соображениям теории вероятности. Как видно из рис. 35, при дальнейшем сдвиге шаров в обратном направлении должно произойти увеличение объема, занимаемого шарами.

В действительности грунт состоит не из правильно расположен-

ных одинаковых шаров, а из ряда более крупных и мелких частиц. Последние образуют всевозможные системы, пустоты которых заполнены водой или воздухом. При сдвиге и действии вертикального давления такая система нарушается, и частицы начинают то наполнять промежутки, уменьшая тем самым пористость образца грунта (подобно тому, как это имело место при сдвиге шаров, — рис. 35), то вновь образуют системы, увеличивая пористость; однако в общем итоге пористость грунта в зоне уменьшится, и грунт уплотнится.

Чтобы уяснить влияние уплотнения при сдвиге, попытаемся выразить этот процесс количественно. Так как уплотнение при сдвиге может вызвать в водонасыщенном или близком к насыщению грунте передачу части давления на воду и тем уменьшить величину коэффициента трения, то представляется существенным установить верхнюю границу этого уплотнения как наиболее опасную с практической точки зрения. Для решения этой задачи выдвинем следующее предположение. Как известно, для уплотнения грунта необходимо затратить работу. Если допустить обычно принимаемую линейную зависимость между пористостью ϵ (отношение объема пор к объему всего грунта) и давлением P , то для изменения пористости на величину ϵ_1 потребуется работа, равная:

$$U = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1}$$

и отнесенная к единице объема грунта. P_1 означает здесь первоначальное и P_2 — окончательное давление, ϵ_1 — первоначальную пористость. Кроме

того на основании общепринятых соотношений можно написать:

$$\epsilon_{\Delta} = a(P_2 - P_1),$$

где a — коэффициент уплотнения.

Определяя из обоих уравнений ϵ_{Δ} как функцию P_1 , находим:

$$\epsilon_{\Delta} = -aP_1 \pm \sqrt{a^2 P_1^2 + 2a\epsilon_1 U},$$

или, принимая во внимание, что если $U=0$, то и $\epsilon_{\Delta}=0$:

$$\epsilon_{\Delta} = + \sqrt{2a\epsilon_1 U + a^2 P_1^2} - aP_1.$$

Если происходит сдвиг, то энергия также подводится к грунту, но в несколько иной форме. Пренебрегая относительно небольшой работой сжимающей силы, мы должны считать, что основной источник работы представляет здесь сила сдвигающая, равная для единицы поверхности:

$$F = P_1 \operatorname{tg} \varphi.$$

Пусть толщина сдвигаемого слоя — H и величина сдвига — L (в направлении, перпендикулярном H). Тогда работа сдвигающей силы, отнесенная к единице объема грунта, будет равна:

$$U_1 = \frac{P_1 L \operatorname{tg} \varphi}{H}.$$

Полагая, что часть этой работы, равная n , затрачивается в данном случае на уменьшение пористости, как и при непосредственном уплотнении, находим:

$$\epsilon_{\Delta} = \sqrt{\frac{2anP_1 L \epsilon_1 \operatorname{tg} \varphi}{H} + a^2 P_1^2} - aP_1.$$

Можно также отметить, что

$$\frac{L}{H} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол скашивания рассматриваемого слоя. Поэтому:

$$\epsilon_{\Delta} = \sqrt{2anP_1 \epsilon_1 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi + a^2 P_1^2} - aP_1.$$

Конечно эта зависимость справедлива лишь в известных пределах изменения величины α и L , так как линейная зависимость между пористостью и давлением может считаться справедливой лишь в известных границах.

Получающаяся описанным путем уменьшенная пористость может осуществиться лишь тогда, когда вода выжимается из грунта или ее там мало. В противном случае, особенно при быстром сдвиге, часть нагрузки ляжет на воду и только некоторое давление P_1' будет продолжать действовать на скелет. Это давление определится, очевидно, так:

$$P_1' = P_1 - \frac{\epsilon_{\Delta}}{a}$$

или

$$P_1' = 2P_1 - \sqrt{2n \frac{P_1 L}{aH} \operatorname{tg} \varphi + P_1^2}.$$

Вызываемое указанным изменением давления относительное уменьшение коэффициента внутреннего трения k , а именно

$$\frac{(\operatorname{tg} \varphi)_\Delta}{\operatorname{tg} \varphi}$$

может быть определено следующим образом.

Полагая, что

$$P_1 \operatorname{tg} \varphi = c_q,$$

$$P_1' \operatorname{tg} \varphi = c_q',$$

$$P_1 \operatorname{tg} \varphi' = c_q',$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{(\operatorname{tg} \varphi)_\Delta}{\operatorname{tg} \varphi} &= \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi} = \\ &= \frac{\frac{c_q}{P_1} - \frac{c_q'}{P_1}}{\frac{c_q}{P_1}} = \frac{c_q - c_q'}{c_q}. \end{aligned}$$

Вследствие того что

$$\frac{P}{P_1'} = \frac{c_q}{c_q'},$$

$$\frac{(\operatorname{tg} \varphi)_\Delta}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{P_1 - P_1'}{P_1},$$

или

$$\frac{(\operatorname{tg} \varphi)_\Delta}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{+ \sqrt{2n \frac{P_1}{a} \varepsilon_1 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi + P_1^2} - P_1}{P_1}.$$

Отсюда:

$$\frac{(\operatorname{tg} \varphi)_\Delta}{\operatorname{tg} \varphi} = + \sqrt{2n \frac{\varepsilon_1}{aP_1} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi + 1} - 1,$$

или

$$\frac{(\operatorname{tg} \varphi)_\Delta}{\operatorname{tg} \varphi} = + \sqrt{2n \frac{\varepsilon_1 L}{aP_1 H} \operatorname{tg} \varphi + 1} - 1.$$

Для того чтобы все приведенные формулы имели реальное значение, необходимо установить величину n . Для этого нужны особые эксперименты, но так как они еще не произведены, то можно ограничиться следующими соображениями, позволяющими исключить n .

Величина ε_Δ не может расти безгранично. В каждом данном случае эта величина имеет некоторое предельное значение, после которого линейная зависимость между ε и P утрачивается и приближенно ε можно полагать постоянным.

Пусть при скашивании такое состояние устанавливается при $\alpha = \alpha_{\max}$. Тогда, очевидно:

$$\varepsilon_{\Delta \max} = \sqrt{2an P_1 \varepsilon_1 \operatorname{tg} \alpha_{\max} \operatorname{tg} \varphi + a^2 P_1^2} - a P_1.$$

Находим отсюда n . Получаем:

$$n = \frac{(\varepsilon_{\Delta \max} + a P_1)^2 - a^2 P_1^2}{2a P_1 \varepsilon_1 \operatorname{tg} \alpha_{\max} \operatorname{tg} \varphi}.$$

На основании этого можно написать:

$$\frac{(\operatorname{tg} \varphi)_{\Delta}}{\operatorname{tg} \varphi} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\varepsilon_{\Delta \max}}{a P_1} + 1\right)^2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_{\max}}} + 1 - 1.$$

Очевидно, приведенная формула справедлива лишь до тех пор, пока $\alpha \leq \alpha_{\max}$. Поэтому максимальное относительное уменьшение коэффициента трения, вообще возможное, будет равно:

$$\left[\frac{(\operatorname{tg} \varphi)_{\Delta}}{\operatorname{tg} \varphi} \right]_{\max} = \frac{\varepsilon_{\Delta \max}}{a P_1}.$$

Величина $a P_1 = \varepsilon_{\Delta 0}$ представляет собой уменьшение пористости при возрастании давления от нуля до P_1 . Поэтому можно также написать:

$$\left[\frac{(\operatorname{tg} \varphi)_{\Delta}}{\operatorname{tg} \varphi} \right]_{\max} = \frac{\varepsilon_{\Delta \max}}{\varepsilon_{\Delta 0}}.$$

В качестве иллюстрации примем для глины $\varepsilon_{\Delta 0} = 0,3$ (при $P_1 = 1 \text{ кг/см}^2$) и $\varepsilon_{\Delta \max} = 0,1$.

Тогда:

$$\left[\frac{(\operatorname{tg} \varphi)_{\Delta}}{\operatorname{tg} \varphi} \right]_{\max} = \frac{1}{3}.$$

Это число делает понятным, почему при затрудненном отводе воды осуществляются с большой легкостью сдвиги массивов глины по определенным плоскостям скольжения.

Если

$$\frac{\varepsilon_{\Delta \max}}{\varepsilon_{\Delta 0}} = 1,$$

остается только одно гидродинамическое трение.

Из этого условия находим предельное значение:

$$\varepsilon_{\Delta \max} = \varepsilon_{\Delta 0}.$$

В зависимости от формы компрессионной кривой указанное предельное значение может осуществиться при различных давлениях P_k . Чтобы найти соответствующее значение P_k , поступают следующим образом. Берут разность между пористостью при $P = 0$ и минимальной пористостью ε_{\min} при достаточно большом давлении. Очевидно:

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_{\min} = \varepsilon_{\Delta 0} + \varepsilon_{\Delta \max} = 2\varepsilon_{\Delta 0}.$$

Обозначим через ϵ_k пористость, соответствующую давлению P_k . Тогда:

$$\epsilon_{\Delta k} = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_{\min}}{2}.$$

Найдя $\epsilon_{\Delta k}$ по этому соотношению, находим по графику компрессионной зависимости без труда и P_k .

Вышеизложенные выводы и подсчеты изменения коэффициента внутреннего трения показывают необходимость устройства приспособления для отвода воды из грунта при исследовании последнего на угол (коэффициент) внутреннего трения.

Сказанное приводит еще и к тому, что, при испытании грунтов на трение, с помощью компрессионной кривой можно избежать проведения опытов в тех условиях, когда сдвиг может произойти с полной передачей давления на воду (в том случае, когда $P_k < P_1'$), а также и с частичной передачей нагрузки на воду. Для исключения влияния указанных обстоятельств следует при подготовке грунта прибегнуть к уплотнению его нагрузкой, несколько большей, чем та, при которой предполагается проводить эксперименты. Такой прием позволяет исключить влияние гидродинамических сил на коэффициент внутреннего трения.

§ 13. ДЕФОРМАЦИЯ СЖАТИЯ КАК ФУНКЦИЯ ВРЕМЕНИ

В дополнение к рассмотренным выше методам статистической механики грунтов можно рассмотреть также методы термодинамические.

Пусть например на поверхности почвы помещен штамп. Будем рассматривать почву и штамп как некоторую физическую систему. Так как деформация этой системы есть особого рода необратимый процесс, то согласно формулировке Больцмана и Планка для второго начала термодинамики энтропия конечного состояния есть линейная функция логарифма вероятности W этого состояния, т. е.:

$$S = k_0 \ln W + \text{const}, \quad (250)$$

где k_0 — постоянная Больцмана.

Обозначая глубину осадки в течение некоторого промежутка времени через Δ , вес сооружения — через F и работу, произведенную силой тяжести при наличии такой осадки, — через U , получим:

$$U = F\Delta.$$

Так как эта работа освобождается при осадке системы, то мы вправе считать ее пропорциональной изменению энтропии системы, т. е.:

$$S = cF\Delta,$$

где c — множитель пропорциональности.

Из уравнения (250) получаем:

$$e^{cF\Delta} = W/k_0 C,$$

или, извлекая корень степени k_0 и заменяя C через $W_0^{k_0}$, где W_0 можно

рассматривать как вероятность состояния системы при $\Delta = 0$, получаем:

$$W = W_0 e^{\frac{cF\Delta}{k_0}} = W_0 e^{c_1 \Delta}, \quad (251)$$

где:

$$c_1 = \frac{cF}{k_0}.$$

Разбивая глубину Δ на весьма малые участки $d\Delta$ и считая, что время $d\tau$ пребывания системы в данных условиях, т. е. на данном участке $d\Delta$, пропорционально вероятности существования системы на данном участке и величине этого участка, получим:

$$d\tau = c_2 W d\Delta,$$

где $c_2 = \text{const}$,

Отсюда:

$$\frac{d\tau}{d\Delta} \cdot \frac{1}{c_2} = W,$$

или, подставляя это равенство в формулу (251), получим:

$$\frac{d\tau}{d\Delta} \cdot \frac{1}{c_2} = W_0 e^{c_1 \Delta},$$

или

$$d\tau = c_2 W_0 e^{c_1 \Delta} d\Delta,$$

что после интегрирования даст:

$$\tau + C = \frac{c_2 W_0}{c_1} e^{c_1 \Delta},$$

или

$$\Delta = \vartheta_1 \ln (\vartheta_2 \tau + \vartheta), \quad (252)$$

где:

$$\vartheta_1 = \frac{1}{c_1};$$

$$\vartheta_2 = \frac{c_1}{c_2 W_0};$$

$$\vartheta = \frac{c_1 C}{c_2 W_0}.$$

Но если $\Delta = 0$ и $\tau = 0$, то согласно формуле (252):

$$\vartheta = 1.$$

Формула (252) принимает в соответствии с этим такой вид:

$$\Delta = \vartheta_1 \ln (\vartheta_2 \tau + 1). \quad (253)$$

Для определения постоянных ϑ_1 и ϑ_2 поступаем следующим образом. Пусть эмпирически установлено, что при наличии осадки $\Delta_1 = 1$ время

от начала постройки сооружения будет τ_1 , а при $\Delta_2 = 2$ соответствующее время будет τ_2 ; тогда согласно формуле (253):

$$\begin{aligned} 1 &= \vartheta_1 \ln (\vartheta_2 \tau_1 + 1); \\ 2 &= \vartheta_1 \ln (\vartheta_2 \tau_2 + 1). \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, определяем ϑ_2 и ϑ_1 :

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= \frac{\tau_2 - 2\tau_1}{\tau_1^2}; \\ \vartheta_1 &= \frac{1}{\ln \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

В окончательном виде уравнение (253) можно написать так:

$$\Delta = \frac{\ln \left(\frac{\tau_2 - 2\tau_1}{\tau_1^2} \tau + 1 \right)}{\ln \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} - 1 \right)}, \quad (254)$$

где τ — время, в течение которого осадка штампа достигла величины Δ .

Так как для наших целей гораздо удобнее брать любое (а не единичное) значение для Δ_1 , то для Δ_2 будем брать значение $2\Delta_1$; тогда, учитывая, что τ_1 есть время, соответствующее осадке Δ_1 , а τ_2 — время осадки $2\Delta_1$, получаем формулу (254) в таком виде:

$$\Delta = \Delta_1 \frac{\ln \left(\frac{\tau_2 - 2\tau_1}{\tau_1^2} \tau + 1 \right)}{\ln \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} - 1 \right)}. \quad (255)$$

§ 14. ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИИ НА ОСАДКУ ШТАМПОВ

Очевидно, что соответствующая деформация — в данном случае осадка штампа — может произойти лишь при каком-то перемещении частиц. Такое перемещение при данной величине деформирующей силы возможно вообще не всегда, а только при определенном начальном расположении частиц. Как только деформация наступила, расположение частиц изменится и становится возможной такая их комбинация, при которой дальнейшего нарастания деформации уже не будет. Поэтому при каждой благоприятной для смещения частиц комбинации будет происходить приращение деформации, равное в среднем Δ_1 .

Если грунт подвержен вибрациям, то эти вибрации, перемещая частицы, будут создавать непрерывно новые их комбинации. Пусть вероятность благоприятной для деформации комбинации частиц будет W . Тогда общая деформация Δ определится так:

$$\Delta = \Delta_1 W N, \quad (256)$$

где N — общее число комбинаций за данное время.

Число N является функцией частоты колебаний и пропорционально времени τ . Пусть импульс силы, необходимый для получения деформа-

ции Δ_1 , равен $F\tau_1$. Очевидно, что при различных комбинациях частиц величина $F\tau_1$ будет различна. В общем случае можно допустить, что значение $F\tau_1$ подчиняется закону распределения Гаусса. В этом случае вероятность появления данной величины $F\tau_1$ определится так:

$$W = c_A e^{-c_B(c_D - F\tau_1)^2}, \quad (257)$$

где c_A , c_B и c_D — некоторые постоянные.

Можно считать, что в большинстве практически существенных случаев $F\tau_1$ значительно меньше c_D , т. е. вероятность неустойчивых комбинаций частиц будет мала.

Поэтому можно показатель степени в формуле (257), равный

$$-c_B(c_D - F\tau_1)^2 = -c_B c_D^2 + 2c_B c_D F\tau_1 - c_B (F\tau_1)^2,$$

заменить величиной:

$$-c_B c_D^2 + 2c_B c_D F\tau_1.$$

Подставляя эту величину в формулу (257) и интегрируя, получаем:

$$W = c_A e^{-c_B c_D^2} \int_0^{F\tau_1} e^{2c_B c_D F\tau_1} dF\tau_1 = \frac{c_A e^{-c_B c_D^2}}{2c_B c_D} \left(e^{2c_B c_D F\tau_1} - 1 \right). \quad (258)$$

Обозначая:

$$\frac{c_A e^{-c_B c_D^2}}{2c_B c_D} = c_\alpha$$

и

$$2c_B c_D = c_\beta,$$

можем написать:

$$W = c_\alpha (e^{c_\beta F\tau_1} - 1). \quad (259)$$

При достаточно больших $c_\beta F\tau_1$ формулу (259) можно заменить следующей:

$$W = c_\alpha e^{c_\beta F\tau_1}. \quad (260)$$

При действии вибраций величина $F\tau_1$ будет при прочих равных условиях функцией частоты колебаний γ . Следовательно формулу (260) можно изменить так:

$$W = c_\alpha e^{c_\gamma \gamma}, \quad (261)$$

где c_γ — соответствующий коэффициент пропорциональности.

Число комбинаций частиц N также будет зависеть от γ . Очевидно

$$N = \gamma \tau.$$

Поэтому можно, исходя из формул (257) и (261), написать следующее:

$$\Delta = \Delta_1 \gamma \tau W = \Delta_1 \gamma \tau c_\alpha e^{c_\gamma \gamma}, \quad (262)$$

или:

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = \Delta_1 \gamma c_\alpha e^{c_\gamma \gamma}.$$

Обозначая:

$$\Delta_1 c_\alpha = c_Q,$$

получаем:

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = c_Q e^{c_1 \tau}. \quad (263)$$

Эта последняя формула показывает, что при возрастании частоты и при прочих неизменных условиях скорость осадки должна возрастать чрезвычайно быстро.

Экспериментальная проверка полученного вывода осуществлена И. С. Федоровым. Она подтвердила правильность формулы (263) в лабораторных условиях¹.

§ 15. ПРОНИКАНИЕ БЫСТРО ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ В ПОЧВЫ И ГРУНТЫ

Первый вариант

Применение статистической механики и термодинамики

Ввиду чрезвычайной сложности физико-механических процессов, сопровождающих разрушение грунта быстро движущимися телами, детальное описание всего происходящего в этом случае едва ли целесообразно. Гораздо проще решать вопрос, исходя из положения статистической механики и рассматривая только энергетическую сторону явления.

Пусть проникающее тело имеет перед ударом в грунт энергию U_0 ; пусть его масса — M и скорость (в какой-либо момент движения внутри грунта) — v . Тогда переданная грунту энергия будет равна:

$$U_0 - \frac{Mv^2}{2}.$$

Очевидно, что эта энергия так или иначе рассеивается в грунте. Поэтому можно считать, что указанная величина пропорциональна увеличению энтропии системы S :

$$c \left(U_0 - \frac{Mv^2}{2} \right) = S, \quad (264)$$

где c — некоторая постоянная, зависящая от состояния грунта.

Изменение энтропии S связано с вероятностью данного состояния следующим соотношением Больцмана:

$$S = k_0 \ln W + C, \quad (265)$$

где k_0 — некоторая определенная и C — произвольная постоянная.

C — может быть определено только в каждом определенном случае из дополнительных условий решаемых задач.

Из формулы (264) и (265) находим:

$$W = c_1 e^{c_2 \left(U_0 - \frac{Mv^2}{2} \right)} \quad (266)$$

¹ Покровский и Некрасов, § 7, «Вестник ВИА» № 6, 1934.

Здесь:

$$c_1 = e^{-\frac{c}{k_0}}$$

и

$$c_2 = \frac{c}{k_0}.$$

Вероятность W данного состояния связана со скоростью выхода системы из этого состояния. Указанная скорость характеризуется величиной:

$$\frac{d\left(\frac{Mv^2}{2}\right)}{d\tau} = \frac{dU}{d\tau},$$

где:

$$U = \frac{Mv^2}{2}.$$

В наиболее простом случае $\frac{dU}{d\tau}$ обратно пропорционально W .

Поэтому согласно формуле (266):

$$c_1 e^{c_2(U_0 - U)} = \frac{c_3}{dU},$$

где:

$$c_3 = \text{const},$$

или

$$c_1 e^{c_2(U_0 - U)} dU = d\tau, \quad (267)$$

где:

$$c_4 = \frac{c_1}{c_3}.$$

Интегрируя выражение (267) и полагая, что при прикосновении снаряда к грунту (т. е. когда $U = U_0$), время $\tau = 0$, получаем:

$$\tau = \frac{c_4}{c_2} (e^{c_2(U_0 - U)} - 1). \quad (268)$$

Время τ_{max} движения снаряда до полной его остановки, при которой $U_{\infty} = 0$, очевидно, равно:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{c_4}{c_2} (e^{c_2 U_0} - 1). \quad (269)$$

Для расчета пути (глубины проникания) L снаряда в грунт необходимо принять во внимание, что:

$$v = \frac{dL}{d\tau};$$

поэтому L можно найти из формулы (268), подставив туда значение U . Получается следующее:

$$\tau = \frac{c_4}{c_2} \left\{ e^{c_2 \left[U_0 - \frac{M \left(\frac{dL}{d\tau} \right)^2}{2} \right]} - 1 \right\}. \quad (270)$$

. Точное решение дифференциального уравнения (270) относительно L представляет некоторые трудности. Поэтому применим приближенный способ. Перепишем указанное уравнение, разложив его в ряд:

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{c_4 c_2}{c_2} \left[U_0 - \frac{M \left(\frac{dL}{d\tau} \right)^2}{2} \right] + \frac{c_4 c_2^2}{c_2} \cdot \frac{\left[U_0 - \frac{M \left(\frac{dL}{d\tau} \right)^2}{2} \right]^2}{2!} + \\ & + \frac{c_4 c_2^3}{c_2} \cdot \frac{\left[U_0 - \frac{M \left(\frac{dL}{d\tau} \right)^2}{2} \right]^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (271)$$

Легко можно доказать, что данный ряд — сходящийся. Принимая это во внимание, можно с известной степенью приближения ограничиться первым членом. Приближение будет при этом тем ближе, чем меньше выражение:

$$c_2 \left[U_0 - \frac{M \left(\frac{dL}{d\tau} \right)^2}{2} \right].$$

Таким образом начальные стадии движения тела в грунте, когда его энергия еще достаточно велика, будут лучше отображаться формулой (271) с одним первым членом, чем конечные стадии с малой энергией.

При таких условиях можно написать:

$$\frac{dL}{d\tau} = \sqrt{\frac{2(c_4 U_0 - \tau)}{c_4 M}}. \quad (272)$$

Решая это уравнение относительно L и полагая, что $L = 0$ при $\tau = 0$, получим:

$$L = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{c_4 M}} \left[(c_4 U_0)^{\frac{3}{2}} - (c_4 U_0 - \tau)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (273)$$

При достижении максимального значения τ_{\max} мы должны иметь следующее:

$$c_4 U_0 - \tau_{\max} = 0;$$

поэтому:

$$c_4 U_0 - \tau_{\max}$$

и

$$L = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{c_4 M}} \left[\tau_{\max}^{\frac{3}{2}} - (\tau_{\max} - \tau)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (274)$$

Максимальное значение $L = L_{\max}$, соответствующее глубине проникания в данную среду, получим при условии, что $\tau = \tau_{\max}$, по следующему соотношению:

$$L_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{c_4 M}} \tau_{\max}^{\frac{3}{2}}. \quad (275)$$

Подставляя сюда τ_{\max} из формулы (269), получаем:

$$L_{\max} = \frac{2c_4}{3c_2^{\frac{2}{3}}} \sqrt{\frac{2}{M}} (e^{c_2 U_0} - 1)^{\frac{3}{2}}. \quad (276)$$

Ввиду некоторой громоздкости этой формулы ее можно упростить, причем за счет соответствующего уменьшения точности. Для указанного упрощения разлагаем формулу (269) в ряд:

$$\tau_{\max} = c_4 U_0 + c_4 c_2 \frac{U_0^2}{2!} + c_4 c_2^2 \frac{U_0^3}{3!}. \quad (277)$$

Беря первый член ряда и подставляя его в выражение (275), получаем (при соответствующей замене U_0):

$$L_{\max} = \frac{c_4}{3} M v_0^3.$$

Обозначая:

$$\frac{1}{3} c_4 = c_5,$$

получаем окончательно:

$$L_{\max} = c_5 M v_0^3, \quad (278)$$

где v_0 означает скорость ударающего тела при ударе в грунт.

Второй вариант. Термомеханическая аналогия

Можно рассматривать взаимодействие ударающего тела со средой с точки зрения молекулярно-кинетической теории теплопроводности. С этой точки зрения снаряд, обладающий избыточной энергией, можно считать нагретым телом (группу молекул с соответствующей кинетической энергией). Поэтому можно допустить, что отдача энергии должна быть в этом случае пропорциональна концентрации энергии (соответствующей температуре). Обозначив кинетическую энергию через U и массу ударающего тела — через M , получим, что концентрация энергии пропорциональна $\frac{U}{M}$.

Поэтому:

$$-\frac{dU}{d\tau} = c_6 \left(\frac{U}{M} - c_7 \right), \quad (279)$$

где τ — время и c_7 — постоянная, зависящая от состояния среды.

Величина постоянной c_6 зависит от площади, на которой происходит взаимодействие между телом и средой. Эта площадь вообще пропорциональна квадрату какого-либо линейного размера тела.

Кроме того можно предположить, что c_7 , характеризующая концентрацию энергии в среде около снаряда, пропорциональна $\frac{U}{M}$, т. е.:

$$c_7 = c_8 \frac{U}{M}. \quad (280)$$

Далее можно допустить также, что скорость передачи энергии от снаряда грунту будет пропорциональна квадрату калибра D .

Поэтому:

$$-\frac{dU}{d\tau} = \frac{(1 - c_8)UD^2}{M}.$$

Заменяв $1 - c_8$ через c_9 , получаем:

$$-\frac{dU}{d\tau} = \frac{c_9UD^2}{M}. \quad (281)$$

Интегрируя это выражение и полагая, что ударяющее тело имеет некоторую энергию U_0 , когда $\tau = 0$ (т. е. когда тело прикасается к границе среды), и что конечная энергия при остановке равна U_∞ , получаем:

$$\tau_{\max} = \frac{M}{c_9D^2} \ln \frac{U_0}{U_\infty}, \quad (282)$$

где τ_{\max} — время движения в данной среде до полной остановки.

На основании формулы (282) можно также написать:

$$\tau = \frac{M}{c_9D^2} \ln \frac{U_0}{U}, \quad (283)$$

где τ — время, через которое энергия изменится от U_0 до U .

Формулу (283) можно переписать еще таким образом:

$$\tau = \frac{M}{c_9D^2} \ln \frac{U_0}{\frac{M}{2} \left(\frac{dL}{d\tau} \right)^2}, \quad (284)$$

ибо кинетическая энергия U равна:

$$\frac{M \left(\frac{dL}{d\tau} \right)^2}{2},$$

где L — путь, проходимый телом в грунте.

Решая выражение (284) относительно L , получаем:

$$L = \frac{\sqrt{8U_0M}}{c_9D^2} \left(e^{\frac{c_9D^2\tau}{2M}} + C \right). \quad (285)$$

Полагая, что $L = 0$ при $\tau = 0$, находим, что постоянная интегрирования $C = -1$. Подставляя вместо τ его максимальное значение из формулы (282), находим:

$$L_{\max} = \frac{\sqrt{8U_0M}}{c_9D^2} \left(\sqrt{\frac{U_0}{U_\infty}} - 1 \right). \quad (286)$$

Несомненно, что при остановке и установлении равновесия между концентрацией энергии в окружающей среде и в ударяющем теле эта концентрация будет зависеть от первоначальной энергии. В простейшем случае можно допустить, что:

$$U_0 = c_{10}U_\infty \quad (\text{где } c_{10} = \text{const}), \quad (287)$$

т. е. что конечная энергия пропорциональна первоначальной. Такое следствие мы получили бы также при строгом проведении термодинамической аналогии. Поэтому:

$$L_{\max} = \frac{\sqrt{8U_0M}}{c_0D^2} (\sqrt{c_{10}} - 1), \quad (288)$$

или

$$L_{\max} = \frac{2Mv_0}{c_0D^2} (\sqrt{c_{10}} - 1), \quad (289)$$

где v_0 означает первоначальную скорость.

Обозначим:

$$(\sqrt{c_{10}} - 1) \cdot \frac{2}{c_0} = c_{11};$$

тогда:

$$L_{\max} = c_{11} \frac{Mv_0}{D^2}. \quad (290)$$

Вероятно величину c_{11} можно проанализировать более детально, развывая приведенную здесь термомеханическую аналогю. Однако это заставит ввести в рассмотрение много дополнительных деталей и поэтому выходит за пределы данного исследования.

Определим на основании изложенного также величину силы сопротивления среды. Эта сила, очевидно, равна $-\frac{dU}{dL}$.

Исходя из формул (284) и (281), находим:

$$-\frac{dU}{dL} = \frac{c_0D^2v}{\sqrt{2}} \quad (291)$$

Из этой формулы следует, что сопротивление среды пропорционально калибру и скорости. Такое сопротивление мы в праве ожидать в случае квази-вязкой среды. Так как нами были применены аналогии с кинетическим механизмом молекулярной системы при решении данной задачи, то, естественно, мы получили для нашей среды вязкие свойства, потому что эти свойства определяются именно примененным здесь механизмом. Пользуясь формулой (291), можно высказать также некоторые соображения о форме траектории. Если начало траектории перпендикулярно к ограничивающей поверхности, то путь вообще должен быть прямым. Если же направление движения составляет некоторый острый угол с поверхностью, то возможно искривление траектории. Для выяснения этого явления разложим скорость движения v на две взаимно перпендикулярные составляющие, направленные под углом $\frac{\pi}{4}$ к траектории. Одна из составляющих (при наклонном направлении движения по отношению к поверхности) будет направлена в сторону поверхности. Обозначим ее через v_a . Другая составляющая v_b будет направлена внутрь среды. На основании простых геометрических соображений можно написать:

$$v_a^2 + v_b^2 = v^2. \quad (292)$$

Поэтому:

$$\frac{Mv_a^2}{2} + \frac{Mv_b^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}. \quad (293)$$

Эта формула показывает, что энергию движения можно разложить на две составляющие. Несомненно, что отдача энергии вверх и вниз будет различной. Это произойдет потому, что отдача энергии вверх будет встречать препятствие в виде поверхности среды. Можно поэтому допустить, что концентрация энергии над траекторией будет больше, чем под ней. Это означает, что величина c_8 [формула (280)] для v_a будет больше, чем для v_b . Можно также написать:

$$-\frac{\frac{M}{2} dv_a^2}{dL} = \frac{(1 - c'_8) D^2}{\sqrt{2}} v_a \quad (294)$$

и

$$-\frac{\frac{M}{2} dv_b^2}{dL} = \frac{(1 - c''_8) D^2}{\sqrt{2}} v_b, \quad (295)$$

где c'_8 и c''_8 — соответствующие значения c_8 .

Из формул (294) и (295) получаем:

$$-dv_a = \frac{(1 - c'_8) D^2}{\sqrt{2} M} dL \quad (296)$$

и

$$-dv_b = \frac{(1 - c''_8) D^2}{\sqrt{2} M} dL. \quad (297)$$

Из простых геометрических соображений следует, что угол поворота траектории $d\alpha$ на пути dL будет подчиняться такому соотношению:

$$d\alpha = \frac{dv_a - dv_b}{\sqrt{2} v}. \quad (298)$$

Отсюда получаем:

$$d\alpha = \frac{(c'_8 - c''_8) D^2}{2 M v} dL. \quad (299)$$

Согласно сказанному ранее c'_8 больше c''_8 .

Следовательно:

$$\frac{c'_8 - c''_8}{2} = c_{12} > 0.$$

Поэтому:

$$d\alpha = c_{12} \frac{D^2}{M v} dL. \quad (300)$$

Чем меньше угол между траекторией снаряда и поверхностью грунта, тем больше величина c_{12} . Кривизна траектории:

$$\frac{d\alpha}{dL} = \frac{c_{12} D^2}{M v}$$

получается наибольшей в конце пути, когда $v = 0$. Конечно необходимо помнить, что описанное здесь явление возможно лишь до тех пор, пока значение угла α не приблизилось к 90° , т. е. пока направление движения не стало перпендикулярным к поверхности почвы. Кроме того величина c_{12} не может рассматриваться как вполне постоянная. Она будет уменьшаться по мере заглубления снаряда в среду.

§ 16. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ МГНОВЕННОЙ ЗАГРУЗКЕ НЕУПРУГОЙ СРЕДЫ И ПОГЛОЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ УДАРА

В дополнение к предыдущим выводам, основанным преимущественно на анализе статистических характеристик дисперсного строения грунтов или соответствующих преобразований энергии, остановимся для завершения этой главы на возможности решения некоторых задач, исходя из принципов сохранения импульса.

При распределении давлений в упругой неограниченной среде (полупространство) в трехмерном случае величины главных напряжений на оси симметрии загруженной части поверхности приближенно обратно пропорциональны квадрату расстояний данных точек от поверхности. Чем меньше телесный угол, под которым видна загруженная поверхность из точки, для которой вычисляется давление, тем точнее этот закон ¹.

Несколько большее приближение получается, если считать, что давление P выражается следующей формулой (для оси симметрии):

$$P = P_0 \frac{H_0^2}{(H_0 + H)^2}, \quad (301)$$

где:

P_0 — давление на поверхности;

$H_0 = \text{const}$;

H — глубина, на которой находится точка, в которой определяется давление.

Величина H_0 имеет тот же порядок, что и средняя геометрическая между сторонами загруженной площадки (если эта площадка прямоугольная). Так как те области техники, где применяется формула (301), не всегда требуют, а иногда даже не допускают еще достаточно точного подхода к решению конкретных задач (чаще всего вследствие статистической неоднородности материала), то выражаемая этой приближенной формулой функциональная зависимость во многих случаях может считаться достаточно точно отвечающей действительности. Формула (301) предусматривает случай статический, когда отсутствуют инерционные силы. Если же, наоборот, нагрузка действует весьма малое время, то инерционные силы могут привести к очень большому уменьшению величины P по сравнению с ее значением в формуле (301), но вместе с тем увеличить время действия этого давления.

Приближенный расчет указанного уменьшения P имеет существенное практическое значение в дорожном деле, в фортификации и тому подоб-

¹ Boussinesq, Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et des mouvements des corps solides élastiques, Paris 1885; Н. М. Герсеванов, Д. Е. Польшин, «Сборник ВМОС» № 1 и 2, 1933.

ных дисциплинах, объектом изучения которых в частности являются грунты и другие пластические и полупластические неупругие материалы. Так как и в данном случае особой количественной точности не требуется, а нужна лишь ясная трактовка основных физико-механических факторов, то для расчета уменьшения величин P при кратковременных нагрузках найти довольно простое и наглядное решение нетрудно.

С этой целью допустим, что энергия, сообщенная среде при импульсе распространяется элементарными радиально расходящимися прямолинейными потоками. Это предположение будет тем более справедливо, чем меньше телесный угол, под которым из данных точек видна загружаемая поверхность.

Выделим в загруженной среде элементарный поток энергии, ограниченный радиально расходящимися плоскостями, образующими конус. Это допущение можно заменить любым более сложным, если возникнет в том необходимость; объем такого конуса равен $\frac{c}{3} H^3$, где H — высота конуса и c — величина, определяющая заострение вершины конуса.

Масса, заключенная в этом объеме, равна:

$$M = \frac{c\rho H^3}{3}, \quad (302)$$

где ρ — плотность среды.

Если энергия распространилась от места импульса на расстояние H и вся масса, будучи неупругой, движется с одинаковой скоростью v , то энергия будет равна:

$$U = \frac{Mv^2}{2} = \frac{c\rho H^3 v^2}{6}. \quad (303)$$

Вместе с тем по закону сохранения импульса скорость равна:

$$v = \frac{I}{M}, \quad (304)$$

или

$$v = \frac{3I}{c\rho H^3}. \quad (305)$$

Из формул (305) и (303) получаем:

$$U = \frac{3}{2} \cdot \frac{I^2}{c\rho H^3}. \quad (306)$$

Эта энергия будет с течением времени затрачена на деформации и ускорение лежащей ниже массы. Если допустить линейную зависимость между напряжением и деформацией (что весьма возможно в неупругой среде), то работа деформации будет равна:

$$U = c_1 P_1^2 H^3, \quad (307)$$

где c_1 — некоторая постоянная, зависящая от константы c и модуля деформации среды. Из формул (306) и (307) получается следующая величина соответствующего напряжения:

$$P_1 = I \sqrt{\frac{3}{2cc_1\rho H^3}}$$

или

$$P_1 = \frac{P'_0 c^3}{H^{2,5}}, \quad (308)$$

где:

$$c_3 = \text{const.}$$

Если в рассмотрение ввести усеченный конус, соответствующий случаю загруженной площадки конечных размеров, то можно получить выражение, аналогичное формуле (301), а именно:

$$P_1 = P'_0 \frac{H_0^{2,5}}{(H_0 + H)^{2,5}}. \quad (309)$$

Возьмем отношение:

$$\frac{P_1}{P} = \psi.$$

Из формул (301) и (309) получается:

$$\psi = \frac{P'_0}{P_0} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{H}{H_0}}}. \quad (310)$$

Но на самой поверхности инерционные силы среды не могут изменить величины так или иначе осуществляемых мгновенных напряжений. Поэтому при $H=0$ мы имеем $\psi=1$. Это возможно однако лишь в случае, когда:

$$\frac{P'_0}{P_0} = 1.$$

Таким образом при изложенных условиях формулу (310) можно переписать еще так:

$$\psi = + \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{H}{H_0}}},$$

или

$$\psi = + \left(1 + \frac{H}{H_0}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (311)$$

Это последнее соотношение можно проверить, сопоставляя его с экспериментальными данными, полученными В. Ф. Бабковым при выполнении его аспирантской работы в Московском автодорожном институте. Приводим некоторые из этих данных в табл. 14. Эти данные получены при помощи аэрогидростатических динамометров, заложенных в полотне и основании грунтовой дороги (песок). Загрузка осуществлялась проезжающей с разными скоростями автомашиной ГАЗ-АА. При скорости ее прохождения, равной 5 км/час, распределение напряжений рассматривалось как близкое статическому случаю, а при скорости в 30 км/час — как близкое к мгновенной нагрузке.

H в см	0	10	20	35	Примечание
ψ эксперимент.	1	0,69	0,57	0,53	—
ψ формула (311)	1	0,72	0,59	0,49	$H_0 = 10,8$ см
Расхождение относительное . . .	—	-0,03	-0,02	+0,04	Среднее квадратичное отклонение 0,03

Приведенные здесь экспериментальные данные в силу свойств грунтов вообще и вследствие малых размеров примененных динамометров не могут претендовать на точность более 20%. Поэтому совпадение величины ψ , исчисленной по формуле (311), с ее экспериментальной величиной можно считать вполне удовлетворительным. Конечно приведенный материал слишком недостаточен, чтобы получить полную уверенность в окончательном подтверждении теории на опыте. Тем не менее табл. 14 показывает степень точности различных количественных построений в данной области.

Вышеизложенная концепция позволяет также установить величину коэффициента поглощения β энергии, распространяющейся в неупругой среде. Обычно β входит в формулу такого типа:

$$U = U_0 e^{-\beta H}. \quad (312)$$

Здесь U_0 означает первоначальную энергию, сообщенную данной среде. Остальные обозначения объяснены выше.

На основании формул (306) и (312) имеем:

$$U_0 e^{-\beta H} = \frac{3}{2} \cdot \frac{I^2}{c_p H^3}. \quad (313)$$

Вводя в эту формулу, как и раньше в формуле (301), постоянную H_0 , получаем:

$$U_0 e^{-\beta H} = \frac{3}{2} \cdot \frac{I^2}{\rho c (H + H_0)^3}. \quad (314)$$

Если $H = 0$, то:

$$U_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{I^2}{c_p H_0^3}. \quad (315)$$

Поэтому:

$$U_0 e^{-\beta H} = U_0 \frac{H_0^3}{(H + H_0)^3},$$

или

$$e^{-\beta H} = \frac{1}{\left(\frac{H}{H_0} + 1\right)^3}. \quad (316)$$

находим отсюда:

$$\beta = \frac{3}{H} \ln \left(1 + \frac{H}{H_0}\right). \quad (317)$$

Из последней формулы видно, что при увеличении H коэффициент поглощения энергии уменьшается.

Таким образом при изложенных здесь концепциях коэффициент поглощения энергии удара является не характеристикой данного вещества, а функцией некоторых геометрических условий, определяемых постоянными H и H_0 . Сопоставляя величину β , исчисленную по формуле (317), с данными, полученными С. И. Синельщиковым¹, можно отметить, что при теоретическом значении коэффициента поглощения энергии порядка 2 см^{-1} экспериментально получается величина порядка 1 см^{-1} для песка, который не является вполне неупругим телом. Такое совпадение поэтому можно считать удовлетворительным. Наибольшее значение β получает при $H = 0$, т. е. при начале распространения ударной волны. В этом случае коэффициент поглощения равен:

$$\beta_{\max} = \frac{3}{H_0}. \quad (318)$$

Если допустить, что разрушение материала происходит при определенном количестве энергии, поглощенной единицей объема вещества, то, исходя из формулы (318), можно определить условия начала разрушения. Пусть P_{\max} есть временное сопротивление раздавливанию и Δ_{\max} — соответствующая максимальная деформация, отнесенная к единице высоты сжимающего слоя. Тогда при линейной зависимости силы от деформации разрушающая единицу объема энергия будет равна:

$$U_m = \frac{1}{2} \Delta_{\max} P_{\max}. \quad (319)$$

Пусть энергия U сообщена площади неупругой среды, равной Q . Тогда разрушение наступит, если:

$$\frac{U}{Q} \beta_{\max} \geq U_m \quad (320)$$

или

$$\frac{3U}{QH_0} \geq \frac{1}{2} \Delta_{\max} P_{\max}. \quad (321)$$

Для случая, при котором происходит выделение энергии в замкнутой сферической полости с радиусом r внутри среды (например взрыв в грунте или породе), можно принять:

$$H_0 = r,$$

$$Q = 4\pi r^3.$$

В этом случае формула (321) преобразуется так:

$$\frac{3U}{4\pi r^3} = \frac{1}{2} \Delta_{\max} P_{\max}. \quad (322)$$

Но

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = V,$$

¹ «Вестник ВИА РККА», Сборник расчетно-конструкторского цикла, 1937.

где V — объем, в котором первоначально была сконцентрирована энергия U .

Таким образом:

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2} \Delta_{\max} P_{\max}. \quad (323)$$

Это не что иное, как простое утверждение, согласно которому разрушение начнется тогда, когда первоначальная плотность энергии будет равна плотности, необходимой для разрушения. Такой вывод именно в силу своей очевидности является лучшим подтверждением описываемой здесь концепции.

Радиус сферы разрушения r_p вообще может быть вычислен так. Разрушение дойдет до границы, где:

$$H_0 + H = r_p. \quad (324)$$

Соответствующая энергия будет равна [по формулам (315) и (316)]:

$$U_p = U_0 \frac{1}{\left(\frac{r_p}{H_0} + 1\right)^3}. \quad (325)$$

Энергия, падающая на единицу фронта ударной волны, будет равна:

$$\frac{U_p}{4\pi r_p^2}.$$

Энергия, поглощенная единицей объема, получается следующая:

$$\frac{U_p \beta}{4\pi r_p^3}.$$

Заменяя U_p по формуле (325), β — по формуле (317) и приравняв полученное выражение U_m в соответствии с формулой (319), находим:

$$\frac{U_0 \cdot 3 \ln \left(1 + \frac{r_p}{H_0}\right)}{\left(\frac{r_p}{H_0} + 1\right)^3 \cdot 4\pi r_p^3} = \frac{1}{2} \Delta_{\max} P_{\max}. \quad (326)$$

Решая последнее уравнение относительно r_p или иной входящей в это уравнение величины, можно определить соответствующую величину как функцию других.

Весьма существенным выводом из уравнения (326) является то, что величина U_0 растет чрезвычайно быстро при увеличении r_p . Для иллюстрации можно указать, что U_0 возрастает быстрее, чем r_p^5 . Это показывает, что если бы удалось создавать весьма пластичные и сжимаемые среды, то сфера разрушений при ударе и взрыве могла бы быть значительно уменьшена. В этом заключается одна из существенных задач физики и технологии дисперсных систем.

Все изложенное в этом параграфе можно резюмировать следующим образом:

1. При распространении напряжений в неупругой среде от кратковременного импульса происходит их уменьшение по сравнению со статическим случаем (вызванное инерционными силами).

2. Отношение напряжений в динамическом случае к напряжениям в статическом случае для оси симметрии (при трехмерной задаче) равно:

$$\psi = + \left(1 + \frac{H}{H_0} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где H — глубина и H_0 — постоянная, порядок которой близок к линейным размерам загруженной площадки.

3. Предварительная экспериментальная проверка этой формулы на данных, полученных В. Ф. Бабковым, дает удовлетворительные результаты.

4. Применяя изложенные концепции к распространению ударной волны, можно показать, что коэффициент поглощения энергии удара или взрыва в совершенно пластической сжимаемой среде не зависит от свойств материала, но определяется размерами воспринимающей удар поверхности.

ГЛАВА IV

ПРИМЕНЕНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ К ПОЧВАМ И ГРУНТАМ

§ 1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВО МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Кроме рассмотренных выше различных теоретических приемов, основанных на статистических методах, возможны также приемы, основанные на аналогиях. В качестве иллюстрации применения таких приемов в первую очередь может служить вопрос, рассматриваемый в данном разделе; решение этой задачи имеет важное значение для расчета оснований сооружений при сложных геологических условиях, а также для дорожного почвоведения.

При загрузке почвы тем или иным способом распределение напряжений и деформаций будет зависеть от свойств отдельных горизонтов, следовательно изучению подлежит при таких условиях так называемая многослойная система.

Количественное определение давлений во многослойной среде, где отдельные слои отличаются друг от друга различными модулями упругости, представляет собой весьма сложную и в общем виде еще не решенную проблему. Приближенные же решения для частных случаев хотя и базируются на весьма произвольных допущениях (например допущение о постоянстве так называемого коэффициента постели в задаче о балке на «упругом» основании или приравнивание нулю касательных напряжений на поверхности раздела двух слоев), тем не менее приводят к весьма сложным формулам, с трудом применимым для практических целей. В связи с проводящимися теперь в СССР работами по проектированию ответственных гидротехнических и иных сооружений на сложных грунтах, является существенно необходимым внести в указанную область возможно более четкую и простую методику. При этом,

учитывая значительные трудности задачи, следует ограничиться пока приближенными, но достаточно определенными по своему физическому содержанию приемами. Для этой цели рассмотрим следующий прием.

Вопросы статики можно рассматривать как предельный случай динамики, когда скорость изменения усилий и деформаций равна нулю. Если рассматривать в частности вибрационный динамический процесс, то от него можно перейти к статической задаче, полагая частоту равной нулю.

Этот прием можно применить с успехом к распределению давлений от произвольной нагрузки в системе плоскопараллельных слоев с различными механическими свойствами.

При этом оказывается возможным установить некоторый весьма простой принцип, легко распространяемый на сколь угодно сложные случаи. Этот принцип удобнее всего уяснить на простейшем примере. Пусть имеется на поверхности некоторого плоскопараллельного слоя толщиной H загруженная точка. Пусть этот слой покоится на втором слое, отличающемся от первого своими механическими свойствами. Поместим начало координат в загруженной точке и направим ось ординат перпендикулярно к границам слоев. Выделим некоторую точку с координатами x и y внутри второго слоя неограниченной толщины (положительные значения принимаем по направлению от загруженной точки внутрь среды). Рассмотрим случай, когда

$$H = y.$$

Таким путем можно найти распределение напряжений на границе нижнего слоя и свести задачу для многослойной среды к задаче о распределении напряжений в однородной среде, которая может считаться решенной для линейно деформируемых тел. В применении к почвам и грунтам это возможно конечно постольку, поскольку в данном случае имеется линейная зависимость между силой и деформацией.

Допустим согласно вышеописанному приему, что к избранной нами на поверхности первого слоя точке приложена динамическая вибрационная нагрузка. Тогда из этой точки будут распространяться упругие волны, претерпевающие преломление на границе двух сред. Допустим, что обе среды упруги и имеют одинаковую плотность¹. Тогда коэффициент преломления будет равен:

$$n = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}},$$

где E_1 и E_2 — соответствующие модули упругости. В результате преломления для наблюдателя, находящегося в нижней среде, мнимое изображение источника колебаний окажется смещенным по сравнению с действительным положением этого источника. Под мнимым изображением разумеется здесь, как и обычно, место взаимного пересечения продолжений двух преломленных лучей, отличающихся по своему направлению на бесконечно малый угол.

¹ Значение плотности при переходе от динамики к статике представляется довольно сложным и может стать предметом специального исследования.

В результате этого вместо верхнего слоя толщиной H у нас получится как бы одинаковый по своим свойствам с нижним слоем эффективный слой толщиной, равной H_0 . Величина H_0 может быть найдена путем несколько громоздкого, но в принципе вполне элементарного геометрического построения, которое мы полностью приводить не будем. В результате построения получается:

$$H_0 = H \sqrt{\frac{E_1}{E_2} \left[\left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) \left(\frac{x}{H}\right)^2 + 1 \right] \left(1 - \frac{x_1}{x}\right)}. \quad (327)$$

Кроме того изображение точки приложения силы будет смещено на величину:

$$x_1 = \frac{x}{1 - \left(\frac{x}{H}\right)^2 + \frac{1}{1 - \frac{E_2}{E_1}}}. \quad (328)$$

Таким образом распределение динамических напряжений в двухслойной, а также и в любой многослойной системе можно свести к распределению напряжений в однородной среде, заменяя слои, лежащие выше исследуемой точки, соответствующими эквивалентными слоями.

Переходя от динамики к статике, можно утверждать следующее. Полученные выше данные для эквивалентного слоя не зависят от частоты вибрации. Поэтому их можно применить также и при частоте, равной нулю. В этом случае мы будем иметь, очевидно, обычное распределение напряжений и деформаций.

Если $\frac{x}{H}$ мало или E_1 близко к E_2 , то получаются значительные упрощения. В этом случае:

$$x_1 = 0, \\ H_0 = H \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}. \quad (329)$$

Формулу (329) можно с известным приближением применять также и при значительных величинах $\frac{x}{H}$ и $\frac{E_1}{E_2}$, потому что формулы (327) и (328) по сравнению с формулой (329) до известной степени взаимно компенсируются. Происходит это потому, что при росте x растет и H_0 . Это приводит к увеличению давлений при больших x . Вместе с тем растет и абсолютная величина x_1 , что уменьшает давления.

Изложенный метод может быть применим также к среде с непрерывно изменяющимся модулем упругости. Это имеет практическое значение, так как у многих почв и грунтов модуль упругости растет с возрастанием первоначального давления P_0 приблизительно по линейному закону:

$$E = E_0 + c_R \cdot P_0, \quad (330)$$

где c_R — постоянная, тем большая, чем более разрыхлен грунт;
 E_0 — модуль упругости при $P_0 = 0$.

Обозначим через γ^* ту часть объемного веса грунта, которая передается непосредственно на скелет грунта, и допустим, что дополнитель-

ное давление в грунте, обусловливаемое капиллярными силами, учтено при нахождении E_0 . Тогда очевидно:

$$P_0 = H\gamma. \quad (331)$$

Если разбить среду на ряд плоскопараллельных слоев с толщинами H_1, H_2, H_3 , и т. д. и модулями E_1, E_2 и т. д., то, исходя из формулы (329), можно написать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} H_{s1} &= H_1 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}; \\ H_{s2} &= (H_2 + H_{s1}) \sqrt{\frac{E_2}{E_3}} = H_1 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + H_2 \sqrt{\frac{E_2}{E_3}}; \\ H_{s3} &= (H_3 + H_{s2}) \sqrt{\frac{E_3}{E_4}} = H_1 \sqrt{\frac{E_1}{E_4}} + H_2 \sqrt{\frac{E_2}{E_4}} + H_3 \sqrt{\frac{E_3}{E_4}}. \end{aligned}$$

Здесь H_{s1}, H_{s2}, H_{s3} и т. д. означают эквивалентные слои, заменяющие соответствующее число элементарных слоев. Отсюда следует:

$$dH_s = \sqrt{\frac{E}{E_m}} dH, \quad (332)$$

где E_m соответствует нижнему подстилающему слою.

На основании формул (329), (330) и (331) можно написать:

$$dH_s = \left(\frac{E_0}{E_m} + \frac{c_R H \gamma}{E_m} \right)^{\frac{1}{2}} dH.$$

Это дает в результате интегрирования:

$$H_s = + \frac{2E_m}{3c_R \gamma} \left[\left(\frac{E_0 + c_R H \gamma}{E_m} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{E_0}{E_m} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Заменяя E_m по формуле (330), получаем окончательно:

$$H_s = \frac{2}{3} \left(\frac{E_0}{c_R \gamma} + H \right) \left[1 - \left(1 + \frac{c_R H \gamma}{E_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (333)$$

Эта последняя формула позволяет переносить выводы, сделанные для линейно деформируемого тела, на случаи нелинейно деформируемого. При этом, если

$$H \gg \frac{E_0}{c_R \gamma},$$

получаем:

$$H_s = \frac{2}{3} H. \quad (334)$$

§ 2. ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ ПРИ РАСЧЕТЕ СКОРОСТИ И ВЕЛИЧИНЫ ДЕФОРМАЦИЙ ГРУНТОВОЙ МАССЫ

Вторым примером приложения метода аналогий к физической механике грунтов является применение электрогидродинамической аналогии к определению скорости деформаций водонасыщенного грунта.

Нашедшую широкое распространение концепцию Терцаги¹ о том,

¹ К. Терцаги, Инженерная геология; Н. М. Герсеванов, Основы динамики грунтовой массы, 1933.

что во многих случаях процессы деформации грунтов можно трактовать как сжатие упругого скелета грунта, сопровождаемое выжиманием заполняющей его поры воды, следует считать в настоящее время (по крайней мере с теоретической точки зрения) известным приближением. Не говоря уже о том, что не все грунты действительно являются водонасыщенными, следует признать, что самый процесс выжимания воды из дисперсной системы типа грунта, особенно глины, весьма мало изучен. Несомненно, что работа выжимания воды состоит из двух частей: во-первых, необходима некоторая энергия для выведения воды изнутри структурных элементов, или, другими словами, для преодоления сил адсорбции; во-вторых, затрачивается энергия для преодоления вязкости воды при ее фильтрации по каналам грунта наружу. Полное применение теория грунтовой массы Терцаги—Герсеванова может получить только при условии, если первое из перечисленных слагаемых энергии деформации достаточно мало по сравнению со вторым.

Этого следует ожидать скорее всего в больших массивах грунта, деформируемых сооружениями значительного масштаба потому, что в этом случае работа на фильтрацию может быть значительной.

Такие условия осуществляются под большими гидростанциями и соответствующими плотинами. В этом случае также обеспечивается в большей степени, чем в других, полная насыщенность грунта водой.

Именно для расчета осадки крупных гидротехнических сооружений и был разработан описываемый далее метод. В первую очередь он был применен к расчету осадки плотины, проектируемой у Камышина на Волге. Осадка значительных по размерам сооружений на мало фильтрующем грунте протекает настолько медленно, что практически имеет интерес не столько величина полной (окончательной) осадки, сколько скорость ее увеличения в начале процесса. Определение скорости деформации грунтовой массы в случае одномерной задачи может быть осуществлено довольно просто теоретическим путем, если известны коэффициент фильтрации и некоторые другие условия. Для случая же двух- и трехмерных задач, гораздо более близких к практике, теоретическое решение пока еще не получено, и можно предполагать, что оно будет достаточно сложным. Поэтому более рационально прибегнуть в этих случаях к гидроэлектродинамической аналогии, установленной первоначально Н. Н. Павловским¹. В приложении к поставленной здесь задаче этот метод требует дополнительного исследования и особой экспериментальной установки².

Рассмотрим сначала теоретическое обоснование. Исходя из допущения, что при всех деформациях материал скелета грунта и вода, заполняющая поры, несжимаемы, можно написать:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} - \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (335)$$

¹ Н. Н. Павловский, Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями, 1922.

² Данное исследование послужило материалом для доклада на I Международной конференции по механике грунтов при Гарвардском университете (Америка). См. «Proceedings of the Conference on Soil-Mechanics» II, USA, Cambridge 1936.

где Q_x, Q_y, Q_z — составляющие плотности расхода воды по осям координат;

V_x, V_y, V_z — составляющие плотности расхода скелета грунта, т. е. объема грунта, перемещающегося в единицу времени через 1 см^2 .

Принимая во внимание закон Дарси:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= q \frac{\partial P}{\partial x}, \\ Q_y &= q \frac{\partial P}{\partial y}, \\ Q_z &= q \frac{\partial P}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (336)$$

где P — гидродинамическое давление, а q — коэффициент фильтрации, можно написать:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = q \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right). \quad (337)$$

Изменение объема некоторой части грунта V_z за время $d\tau$ получается следующим образом:

$$\frac{dV_z}{d\tau} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (338)$$

Отсюда из формулы (337) следует:

$$\frac{dV_z}{d\tau} = q \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) dx dy dz. \quad (339)$$

Представим себе теперь электрическую систему, где внутри некоторой проводящей среды с удельной электропроводностью s имеется такое распределение потенциалов V_s , при котором:

$$V_s = cP, \quad (340)$$

где c — коэффициент пропорциональности.

Согласно закону Ома и первому принципу Кирхгоффа можно написать:

$$\frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial i}{\partial y} + \frac{\partial i}{\partial z} = s \left(\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_s}{\partial z^2} \right), \quad (341)$$

где i — плотность тока.

Но согласно формуле (340) имеем:

$$\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_s}{\partial z^2} = c \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right). \quad (342)$$

Поэтому формулу (339) можно переписать так:

$$\frac{dV_z}{d\tau} = \frac{q}{cs} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial i}{\partial y} + \frac{\partial i}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (343)$$

Если задача решается приближенно, то данную систему можно разбить на достаточное число достаточно малых конечных объемов, распределить по этим элементарным объемам электроды с соответствующими потенциалами и измерить силы токов i , питающие каждый элемент объема V_Δ . Тогда вместо формулы (343) можно написать следующее приближенное выражение:

$$\frac{dV_2}{d\tau} = \frac{q}{cs} \sum \frac{iV_\Delta}{L}, \quad (344)$$

где L — расстояние между электродами.

Если необходимо определить осадку, т. е. вертикальное перемещение элементарного слоя, находящегося непосредственно под сооружением, то можно осуществить следующую экспериментальную схему.

В проводящей среде (электролит или графитовый порошок) располагают систему электродов. Расположение электродов в системе должно, если воспроизводится тот или иной момент процесса деформации, соответствовать поверхностям равных напоров, т. е. поверхностям, все точки которых имеют одинаковое гидродинамическое давление, устанавливаемое теоретическим расчетом. В этой системе выделяют трубки тока путем устройства изолирующих стенок. Проще всего решается задача, если необходимо определить осадку точки, находящейся на оси симметрии системы. Тогда можно ограничиться всего одной трубкой тока, ось которой будет совпадать с осью симметрии. При этом предполагается, что эта ось симметрии является прямой вертикальной линией. Внутри трубки тока, осуществленной на экспериментальной установке, должны быть расположены электроды, имеющие форму поверхностей равного давления, к которым приложены потенциалы, соответствующие формуле (340). Силы тока, идущие к этим электродам при изложенных условиях и замеренные при помощи гальванометров или миллиамперметров, обозначим через i_A .

Тогда плотности токов будут равны:

$$i = \frac{i_A}{Q_s}, \quad (345)$$

где Q_s — площадь соответствующего электрода.

При этих условиях формулу (344) можно переписать так:

$$\frac{dV_2}{d\tau} \cdot \frac{1}{Q_s} = \frac{dh}{d\tau} = \frac{q}{cs} \sum \frac{i_A}{Q_s^2 L} Q_s L$$

или

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{q}{cs} \sum \frac{i_A}{Q_s}, \quad (346)$$

где $\frac{dh}{d\tau}$ обозначает скорость осадки.

Множитель, стоящий перед знаком суммы, может быть вычислен без затруднения, потому что коэффициент фильтрации должен быть известен как единственная характеристика грунта, на который переносится результат данного расчета; величину c необходимо установить при подборе потенциалов на экспериментальной установке, а s непосредственно характеризует примененную электропроводящую среду. Однако если s

заранее не определено, то можно поступить еще следующим образом. Между двумя плоско параллельными поверхностями, находящимися на расстоянии L_0 друг от друга и имеющими площадь $Q_{\varepsilon 0}$, закладывается данная электропроводящая масса, прилагается разность потенциалов $V_{\varepsilon 0}$ и измеряется сила тока.

Тогда:

$$s = \frac{i_{A0} L_0}{V_{\varepsilon 0} Q_{\varepsilon 0}}. \quad (347)$$

Поэтому можно также написать:

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{q Q_{\varepsilon 0} V_{\varepsilon 0}}{c i_{A0} L_0} \sum \frac{i_A}{Q_{\varepsilon}}. \quad (348)$$

Определив $\frac{dh}{d\tau}$ на основании формулы (348) по экспериментальным данным, можно также вычислить осадку в зависимости от времени. Допустим, что тем или иным путем, например на основании компрессионных кривых и так или иначе установленного распределения напряжений, вычислена окончательная, наступающая после выжимания всей избыточной воды осадка h_{\max} . Тогда, принимая во внимание, что мы имеем здесь вообще случай вязкой деформации, можно приближенно написать¹:

$$h = h_{\max} (1 - e^{-c_1 \tau}). \quad (349)$$

Постоянную c_1 можно определить, если известно $\frac{dh}{d\tau}$ при $\tau = 0$. При этом значении τ :

$$\frac{dh}{d\tau} = c_1 h_{\max}. \quad (350)$$

Если условия, при которых определялось $\frac{dh}{d\tau}$, отвечают распределению избыточных напоров в грунтовой воде при $\tau = 0$, то можно написать на основании формул (348) и (350):

$$c_1 = \frac{q Q_{\varepsilon 0} V_{\varepsilon 0}}{c i_{A0} L_0 h_{\max}} \sum \frac{i_A}{Q_{\varepsilon}}. \quad (351)$$

Поэтому формулу (349) можно видоизменить так:

$$h = h_{\max} \left(1 - e^{-\frac{q Q_{\varepsilon 0} V_{\varepsilon 0}}{c i_{A0} L_0 h_{\max}} \sum \frac{i_A}{Q_{\varepsilon}} \tau} \right). \quad (352)$$

Таким образом изложенное в этом параграфе приводит к следующим выводам.

1. Исходя из аналогии между фильтрацией воды в грунте и движением электричества в проводнике, можно найти решение некоторых вопросов, касающихся деформации водонасыщенного грунта (грунтовой массы).

2. В частности на основе лабораторных опытов можно установить скорость осадки сооружения, стоящего на грунтовой массе, в случае двух- и трехмерной задач.

¹ Г. И. Покровский, «Гидротехническое строительство» № 6, 1934; Н. А. Цытович, Основы механики грунтов, 1934.

3. При некоторых дополнительных допущениях можно также определить зависимость осадки от времени.

Настоящая теория была применена в Институте Водгео (Москва) инж. И. В. Федоровым для расчета осадки Камышинской плотины. Для этой цели им была осуществлена соответствующая экспериментальная установка¹.

ГЛАВА V

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРИБОРОВ, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГРУНТА

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРИБОРОВ С ЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ

Все приборы, предназначенные для изучения механических свойств грунтов и почв, можно разделить на две категории. К первой из них можно отнести такие приборы, внутри которых помещается соответствующий образец почвы или грунта. Ко второй категории относятся такие приборы, которые сами помещаются внутрь грунта. В этой главе рассматриваются основные теоретические предпосылки, определяющие точность показаний, получаемых при употреблении тех или иных приборов обеих категорий. Исследование этой проблемы представляется особенно важным потому, что в практику работы различных лабораторий уже сравнительно давно вошли разнообразнейшие приборы для изучения механических свойств грунтов, но до последнего времени не был разработан метод теоретической оценки свойств этих приборов. Этот пробел и должен быть хотя бы частично возмещен соображениями, излагаемыми в данной главе.

Прежде всего остановимся на приборах, предназначенных для определения компрессионной зависимости и сопротивления сдвигу образцов грунта.

Почти все без исключения образцы, исследуемые в таких приборах, имеют цилиндрическую форму. Это нужно считать рациональным потому, что цилиндрический образец имеет минимальную (при данной высоте и данном объеме) боковую поверхность и действующие на него силы меньше искажаются трением и сцеплением между образцом и стенками приборов. Однако и у цилиндрического образца могут быть значительные искажения, обуславливаемые как трением и сцеплением, так и методикой взятия образца.

Остановимся сначала на взятии образца. В настоящее время наиболее удобным считается получать образец ненарушенного строения, вдавливая в ненарушенный массив грунта тонкостенный цилиндр с заостренным нижним краем. При этом заострение сделано таким образом, чтобы уменьшить трение грунта о внутренние стенки прибора. Но если даже это трение и сведено к нулю, то все же неизбежно известно обжатие грунта в тот момент, когда нижний край цилиндра еще не дошел до данного уровня. Это обуславливается некоторым распределением напряжений под загруженным довольно значительной силой (без которой невозможно вдавливание) нижним краем цилиндра.

¹ Г. И. Покровский и И. В. Федоров, «Гидротехническое строительство» № 6, 1936.

Не ставя целью полное решение задачи о деформациях образцов грунтов и почв при их взятии, можно все же наметить основные принципы, которые при необходимости легко уточнить в той или иной мере для отдельных конкретных случаев.

Упрощая общую схему расчета, выберем вместе с тем такое решение, которое гарантирует известный запас надежности. Такое требование легче всего осуществить, полагая, что напряжения распределяются (под нижним краем врезаемого в почву цилиндра) внутри объема, ограниченного двумя коническими поверхностями. Образующие этих поверхностей направлены под некоторым углом α относительно направления действия вдавливающей цилиндр силы F . Как видно из дальнейшего, величина α в данном расчете не играет никакой роли. Другими словами, получающийся результат не зависит от величины угла α . Допустим (с запасом надежности), что давление P , действующее на грунт в направлении силы F на расстоянии H от плоскости нижнего края цилиндра, распределено равномерно по загруженной площади Q . Тогда:

$$P = \frac{F}{Q}. \quad (353)$$

Но, исходя из геометрических условий нашей задачи, получаем:

$$Q = 4\pi(r_0^2 - r_0 r). \quad (354)$$

Здесь r_0 означает радиус цилиндра и r — расстояние от оси цилиндра до точки внутри грунта, где ищется возникающее при взятии образца максимальное возможное давление P . Из формул (353) и (354) получаем:

$$\frac{r}{r_0} = 1 - \frac{F}{4\pi r_0^2 P}. \quad (355)$$

Если необходимо, чтобы образец грунта оказался достаточно мало искаженным деформациями, возникающими при указанных условиях, нужно, чтобы $\frac{r}{r_0}$ было близким единице. Это означает, что расстояние от оси образца до мест, где напряжение достигло недопустимо больших значений, должно быть близким к радиусу образца. Величина P в формуле (355) должна при этом быть приравнена внутреннему (капиллярному) давлению, имеющемуся в данном грунте. Величина же F может быть определена непосредственным измерением при взятии образца.

Из всего сказанного вытекает, что взятые описанным способом образцы грунтов имеют некоторую попорченную (уплотненную) зону, охватывающую внутреннее неискаженное ядро.

Перейдем теперь к распределению напряжений в образце, обжимаемом внутри цилиндрического сосуда жестким штампом. Точный анализ игры сил в этом случае также чрезвычайно сложен. Поэтому ограничимся здесь простейшими приемами. Применим к данному случаю метод Янсена, при котором, как известно, допускается, что массив, заключенный в жестком сосуде, сам обладает совершенной жесткостью в плоскостях, перпендикулярных к направлению действия загружающей силы.

Это предположение к сожалению нельзя считать обеспечивающим должный запас надежности, и поэтому получаемые здесь результаты

могут служить лишь для приблизительной оценки характера работы прибора.

Итак, пусть на грунт от штампа передается давление P_0 . Тогда в слое грунта, отстоящем от поверхности штампа на бесконечно малое расстояние dH , будет наблюдаться давление:

$$P = P_0 - dP. \quad (356)$$

При этом:

$$-dP = \frac{2\pi r_0 P \xi \operatorname{tg} \varphi_1}{\pi r_0^2} dH = \frac{2P \xi \operatorname{tg} \varphi_1}{r_0} dH, \quad (357)$$

где ξ означает коэффициент бокового давления и φ — угол трения грунта о стенки прибора.

Из формулы (357) получаем:

$$P = P_0 e^{-\frac{2\xi \operatorname{tg} \varphi_1 H}{r_0}}, \quad (358)$$

или

$$\frac{P}{P_0} = e^{-\frac{2\xi \operatorname{tg} \varphi_1 H}{r_0}}. \quad (359)$$

Если необходимо, чтобы образец был обжат практически равномерно, отношение $\frac{P}{P_0}$ должно отличаться от единицы на величину, не превосходящую допустимой ошибки.

Если с точки зрения формулы (359) проанализировать некоторые из существующих приборов, например прибор Пузыревского для определения внутреннего трения в грунтах, то можно сразу сказать, что форма образцов, принятых в этом приборе, неудовлетворительна. Если в среднем $\xi \operatorname{tg} \varphi = 0,5$ и, как это вытекает из обычного устройства прибора Пузыревского: $\frac{H}{r_0} = 2$, то

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{2,72^2} = 0,135.$$

Искажение получается таким образом здесь более чем в 7 раз.

Как известно, в последнее время во избежание трения образца грунта о стенки прибора стали применять так называемое гидростатическое обжатие образца грунта, заключенного в резиновую оболочку. Впервые эта идея была предложена проф. Н. Н. Давиденковым и разработана Яппу, потом она нашла широкое применение в приборах системы Лалетина, Медкова, Булычева, а также в ряде заграничных лабораторий, как это видно на пример из докладов, представленных на Всемирную конференцию по механике грунтов 1936 г.

Однако метод гидростатического обжатия не исключает применения приборов с жесткими стенками. Поэтому изложенные выше соображения заслуживают и впредь быть учтенными и развитыми в соответствии с теми или иными конкретными случаями.

§ 2. ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ИЗМЕРЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГРУНТЕ И ДРУГИХ МАТЕРИАЛАХ ПРИ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Переходя к приборам, помещаемым в грунт, следует отметить прежде всего, что такие приборы преимущественно предназначены для измерений напряжений, так или иначе возникающих в грунте и почве. Именно с этой точки зрения мы и подойдем к данному вопросу.

Как известно, многообразные изменения, которые возникают в дисперсных системах типа грунтов и бетонов при том или ином механическом воздействии, захватывают всегда некоторый объем материала и никогда не ограничиваются только поверхностью, соприкасающейся непосредственно с объектом, воздействующим на среду.

Таким образом в дисперсной системе создается некоторое объемное изменение, обусловливаемое существованием в течение некоторого промежутка времени механического силового поля. Это механическое силовое поле вообще довольно быстро возникает и вновь исчезает при процессах, имеющих значение при изучении вибраций, в дорожном деле, агротехнике и военно-инженерном деле. Поэтому все характеристики такого поля следует считать функцией времени, что весьма значительно влияет на те требования, которые следует предъявить к экспериментальному изучению вопроса.

Изменения структуры материала, обусловливаемые динамической нагрузкой, зависят вообще от двух факторов:

1) величины и характера максимальных напряжений, возникающих в данном элементе объема почвы при обработке;

2) величины импульсов, действовавших на тот или иной объем. Здесь под импульсом I следует понимать произведение из давления P на время τ , или, точнее:

$$I = \int_0^{\tau} P d\tau. \quad (360)$$

Первый фактор имеет преимущественное значение, когда время, необходимое для достижения равновесия между воздействующими силами и силами статического сопротивления материала, мало по сравнению со временем внешнего воздействия. В противном случае имеет преобладающее значение второй фактор.

Чтобы получить возможность строить те или иные количественные концепции в области динамики грунтов, необходимо в достаточно ясной степени установить картину механического силового поля, возникающего в материале при тех или иных внешних воздействиях. В последнее время все более ощущается необходимость вводить экспериментальные методы даже в области материалов, наиболее хорошо подчиняющихся теории упругости. Достаточно назвать здесь хотя бы оптический метод исследования напряжений в поляризованном свете или небезуспешные попытки применить лучи Рентгена к исследованию внутренних напряжений в металлах и иных микроструктурных телах. Перенос выводов теории упругости и иных представлений, развившихся применительно к «твердым телам», на твердые дисперсные системы сам по себе мало обоснован.

Эти системы легко изменяют свой объем при воздействии на них

давления, чего почти нет (при обычных давлениях) в твердых телах (в общепринятом смысле слова). Таким образом существующие сейчас теоретические концепции можно переносить на грунты и строительные материалы только при соответствующей экспериментальной проверке. Исключение составляют разве лишь выводы статистической теории грунтов. Однако и эти выводы по самому своему характеру требуют безусловно дополнительных экспериментальных дополнений и проверки.

Из сказанного вытекает необходимость при любых теоретических предположениях, известных в настоящее время, исследовать свойства механического силового поля, деформирующего материал при тех или иных воздействиях.

Такое исследование можно проводить двумя различными способами: во-первых, используя самый материал как некоторый регистрирующий механические воздействия прибор и, во-вторых, помещая так или иначе непосредственно в данную среду те или иные аппараты. Первый способ несомненно изящнее и непосредственнее второго, но он пока очень мало разработан. Некоторый опыт имеется в этом отношении в области механики грунтов, что мы рассмотрим далее более подробно. Более уместным и надежным следует считать в настоящее время все же второй прием — помещение особых динамометров непосредственно в самый материал. Решение множества статических задач в области механики грунтов свидетельствует о правильности такого метода. Здесь можно указать на работы Давиденкова¹, Федорова², Бабкова³ и ряда американских исследователей в области дорожного дела и техники подземных сооружений, а также работы Синельщикова⁴ и особенно проф. Садовского.

Накопленный при перечисленных работах опыт может быть применен к решению многочисленных задач, однако при этом необходимо развить также и теоретические обоснования.

Прежде чем переходить к конкретным методам, нужно установить критерии точности в данной области. Следует также отметить, что излагаемые далее вопросы представляют интерес и для других видов измерений свойств грунтов и почв.

Точность того или иного наблюдения можно характеризовать средним квадратичным отклонением отдельных значений от их среднего арифметического значения. Однако, применяя подобный метод оценки точности показаний тех или иных аппаратов, находящихся в дисперсной среде типа грунта или бетона, следует учесть огромное значение флуктуаций свойств самых измеряемых величин, что обуславливается обычно сравнительно грубой структурой материала. Чтобы избавиться от этих флуктуаций и получить малую среднюю ошибку наблюдений, пришлось бы поэтому применять приборы значительного (по сравнению со структурными элементами) размера. Но это привело бы также к невозможности измерять точно напряжения как функцию пространственных координат,

¹ Н. Н. Давиденков, Электрический метод изменения напряжений, изд. ЛФТИ, 1929.

² И. С. Федоров, «Сборник ВИОС» № 6, 1935; «Журнал техн. физики» № 6, 1935, № 4, 1936.

³ В. Ф. Бабков, Аспирантская диссертационная работа, МАДИ, 1935/36.

⁴ Г. И. Покровский и С. И. Синельников, «Вестник ВИА РККА» № 17, 1936.

потому что изменение силового поля может быть значительным даже на малых расстояниях (порядка 1 см). Таким образом в условиях рассматриваемой здесь задачи невозможно избежать влияния флуктуаций, обусловленных особенностями структуры. Кроме того и самые эти флуктуации представляют собой весьма важный фактор, характеризующий структуру материала¹ и заслуживающий подробного изучения.

Поэтому ко всякому методу, применяемому к измерению тех или иных свойств дисперсной системы в данной точке, следует предъявлять требование правильного отражения флуктуаций.

Если считать, что флуктуации подчиняются закону, достаточно близкому к функции распределения Гаусса, и измерительный прибор сам не вносит каких-либо систематических искажений, то можно написать следующее соотношение:

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad (361)$$

где x_1 — средняя квадратичная флуктуация, обусловленная структурой материала;

x_2 — средняя квадратичная ошибка, вызываемая самим методом измерения;

x — действительно наблюдаемая средняя квадратичная флуктуация.

Вообще необходимо, чтобы x и x_1 были возможно более близки друг к другу. Разность между ними вообще равна:

$$x_\Delta = x - x_1 = \left(\sqrt{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}} - 1 \right) x_1. \quad (362)$$

Если $x_2 \ll x_1$, то можно также написать:

$$x_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2}{x_1} x_2. \quad (363)$$

Последнее соотношение показывает, что при увеличении точности метода измерений ошибка, им вызываемая, весьма быстро уменьшается, что можно также иллюстрировать табл. 15, вычисленной по формуле:

$$x_2 = x_1 \sqrt{2 \frac{x_\Delta}{x_1}}. \quad (364)$$

Из табл. 15 вытекает, что величина флуктуации определяется значительно точнее, чем непосредственно измеряемая величина; так например, при средней квадратичной флуктуации, равной 0,5, и при ее измерении со средней квадратичной ошибкой в 10% (0,1) требуется метод измерения со средней квадратичной ошибкой, равной 24% (0,24).

Все изложенное позволяет утверждать, что точность методов, применяемых при изучении величин, подверженных флуктуации, может быть заметно уменьшена без вреда для точности окончательного результата. Поэтому при изучении механического силового поля в структурных материалах можно ограничиться сравнительно неточными методами, но безусловно следует исключить возможность систематических, искажающих результат в какую-либо одну сторону обстоятельств.

¹ Г. И. Покровский, «Почвоведение» № 1, 1936.

Относительная ошибка при определении флуктуации	$\frac{x\Delta}{x_1} =$	0,010	0,050	0,100
$x_1 = 0,05$	$x_2 =$	0,007	0,016	0,024
$x_1 = 0,1$	$x_2 =$	0,014	0,032	0,048
$x_1 = 0,2$	$x_2 =$	0,028	0,064	0,096
$x_1 = 0,5$	$x_2 =$	0,070	0,160	0,240

§ 3. ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ДИНАМОМЕТРА НА ТОЧНОСТЬ ЕГО ПОКАЗАНИЙ

Динамометр, предназначенный для измерения напряжений и вложенный с этой целью в данную среду, должен независимо от своего устройства возможно меньше отличаться по своим свойствам от окружающей его среды и возможно меньше искажать своим присутствием протекающие там процессы. Прежде всего динамометр должен обладать жесткостью, близкой к жесткости окружающего его материала. Степень точности, с которой должно удовлетворяться это требование, можно установить следующим путем.

Пусть при действии некоторого давления P объем V уменьшается на величину V_Δ . Если допустить (приближенно) линейную зависимость между сжатием и напряжением, то можно написать:

$$\frac{V_\Delta}{V} = aP, \quad (365)$$

где a — коэффициент уплотнения.

Соответствующее соотношение для динамометра пусть будет:

$$\frac{V_{1\Delta}}{V} = a_1 P_1.$$

Допустим, что a_1 не равно a . Тогда динамометр, имея иную жесткость, чем окружающая его среда, сожмется иначе, чем эта среда, и измеренное им давление будет отличаться от давления, действительно имеющего место в грунте.

Путем простых рассуждений можно доказать, что

$$\frac{P_1}{P} \geq \frac{a}{a_1}.$$

Вычитая единицу из правой и левой части, находим относительную ошибку в измерении напряжений:

$$\frac{P_1}{P} - 1 = \frac{P_1 - P}{P} = \frac{P_\Delta}{P} \geq \frac{a}{a_1} - 1. \quad (366)$$

Величина

$$\frac{a}{a_1} - 1 = \frac{a - a_1}{a_1} = \frac{a_\Delta}{a_1} \quad (367)$$

может рассматриваться как ошибка при несоблюдении правила одинаковой жесткости динамометра и окружающей его почвы.

Из сказанного вытекает, что ошибка в жесткости является верхним пределом для ошибки при измерении напряжения. Этот предел следует считать однако несколько преувеличенным. Так например, опыты, проделанные А. Я. Медведевым в Институте Водгео¹, показывают, что даже при чрезвычайно жестких динамометрах, у которых $\frac{a_\Delta}{a_1} \gg 1$, ошибка в определении напряжения $\frac{P_\Delta}{P}$ не превосходит величины порядка единицы. Объяснение этому следует искать в известном выравнивающем действии окружающих динамометр слоев материала в соответствии с принципом Сен-Венана.

Вышеизложенные соображения являются конечно приближенными. В большинстве динамометров деформация мембраны, воспринимающей напряжение, неодинакова в различных ее частях. Боковые стенки обычно являются жесткими и поэтому не принимают участия в деформации прилегающей к ним среды.

Наличие жестких стенок приводит часто и к разгрузке самой мембраны, что может уменьшать ошибку при более жестком, чем данный материал, динамометре. Если же динамометр более сжимаем, чем окружающая его среда, то жесткие стенки увеличивают ошибку.

Вторым требованием, касающимся однородности свойств динамометра и почвы, является одинаковая плотность. Это требование обусловливается двумя обстоятельствами. Во-первых, при несовпадении плотности почвы и динамометра последний может собственным весом произвести искажение силового поля. Пусть вес динамометра — G , объем его — V и максимальное линейное измерение — L . Тогда максимальное искажение силового поля при статических условиях будет равно:

$$P_\Delta = \left(\frac{G}{V} - \gamma \right) L, \quad (368)$$

где γ — означает объемный вес материала.

Соответствующая относительная ошибка равна:

$$\frac{P_\Delta}{P} = \left(\frac{G}{V} - \gamma \right) \frac{L}{P}. \quad (369)$$

Последнее соотношение показывает, что относительная ошибка уменьшается при возрастании P . В большинстве случаев, когда P — порядка 1 кг/см^2 (и выше), ошибкой от собственного веса динамометра можно пренебречь.

Если динамометр подвержен динамическим воздействиям, то вместо формул (368) и (369) получаются следующие:

$$P_\Delta = \left(\frac{G}{V} - \gamma \right) L \frac{g_1}{g}; \quad (370)$$

$$\frac{P_\Delta}{P} = \left(\frac{G}{V} - \gamma \right) \frac{L}{P} \cdot \frac{g_1}{g}. \quad (371)$$

Здесь g_1 означает максимальное ускорение, получаемое в данной точке почвы, и g — ускорение силы тяжести.

¹ Еще не опубликованные опыты проделаны с песком и глиной нарушенной структуры.

Является желательным, чтобы помимо одинаковой жесткости и плотности динамометр обладал и некоторыми другими свойствами, отвечающими свойствам среды. Здесь можно упомянуть о коэффициенте бокового давления, равном минимально возможному в данной дисперсной системе отношению $\frac{P_b}{P_a}$.

Это требование обычно не выполняется, и величина этого отношения у динамометров зачастую гораздо меньше, чем у того материала, внутри которого они помещаются.

Существенно также, чтобы поверхностное трение материала о динамометр было близко по величине ко внутреннему трению в этом материале. Для этой цели достаточно сделать поверхность прибора достаточно неровной.

Кроме рассмотренных свойств, общих у всех возможных типов динамометров, немалое значение имеет и метод их введения в данную среду. Однако этот вопрос удобнее рассмотреть более подробно в специальных исследованиях, отдельно для разных конкретных задач. Здесь можно лишь отметить, что с точки зрения удобства следует поставить на первое место динамометры с минимальным габаритом и компактной формы.

Если динамометр должен фиксировать быстропеременные и в частности кратковременно действующие напряжения, то значительные искажения могут быть вызваны инерционными силами и различного вида трением, возникающим в приборе при его быстрой деформации.

Рассмотрим прежде всего случай, когда динамометр имеет весьма малое трение. Тогда можно рассматривать одни лишь инерционные алы. Пусть масса, перемещающаяся при деформации прибора, равна M и скорость деформации $\frac{dh}{d\tau}$ (максимальная) равна $\left(\frac{dh}{d\tau}\right)_{\max}$.

Накопленная при этом в динамометре кинетическая энергия равна:

$$U = \frac{1}{2} M \left(\frac{dh}{d\tau} \right)_{\max}^2. \quad (372)$$

После прекращения действия силы эта энергия будет вызывать дальнейшее нарастание деформации прибора и приведет к регистрации давления, превосходящего данное P на некоторую величину P_Δ .

Если допустить, что в некотором пределе существует линейная зависимость между P и h и обозначить площадь мембраны прибора через Q , то на основании закона сохранения энергии мы получим следующее равенство:

$$U = \left(P + \frac{P_\Delta}{2} \right) h_\Delta Q. \quad (373)$$

Здесь h_Δ означает приращение деформации динамометра, соответствующее P_Δ .

Если V_1 — объем динамометра и a_1 — его коэффициент уплотнения, то можно написать:

$$\frac{h_\Delta Q}{V_1} = a_1 P_\Delta. \quad (374)$$

Отсюда:

$$h_{\Delta} Q = a_1 P_{\Delta} V_1. \quad (375)$$

Заменяя в формуле (373) $h_{\Delta} Q$ по формуле (375) U по формуле (372), получаем такое уравнение:

$$P_{\Delta}^2 + 2PP_{\Delta} - \frac{M\left(\frac{dh}{d\tau}\right)_{\max}^2}{a_1 V_1} = 0. \quad (376)$$

Определяем отсюда:

$$P_{\Delta} = \pm \sqrt{P^2 + \frac{M\left(\frac{dh}{d\tau}\right)_{\max}^2}{a_1 V_1}} - P. \quad (377)$$

Соответствующая относительная ошибка равна:

$$\frac{P_{\Delta}}{P} = \pm \sqrt{1 + \frac{M\left(\frac{dh}{d\tau}\right)_{\max}^2}{a_1 V_1 P^2}} - 1. \quad (378)$$

Если время, в течение которого нарастают давление и деформация, равно τ , то приближенно:

$$\left(\frac{dh}{d\tau}\right)_{\max} = \frac{a_1 V_1 P}{Q\tau}. \quad (379)$$

Поэтому можно написать:

$$\frac{P_{\Delta}}{P} = \pm \sqrt{1 + \frac{Ma_1 V_1}{Q^2 \tau^2}} - 1. \quad (380)$$

Практический смысл имеют в формулах (377), (378) и (380) только знаки плюс перед корнем, так как наличие кинетической энергии всегда приведет к преувеличению показаний динамометра. Данный вывод сделан при допущении, что какое-либо трение отсутствует. Наличие всякого трения уменьшит рассчитываемую описанным способом ошибку.

Поэтому можно считать, что формула (380) дает верхний предел для ошибок, вызываемых инерционными силами.

Теперь перейдем к противоположному случаю, когда инерционные силы отсутствуют, но действуют силы трения (вязкости). В этом случае при кратковременном действии силы возможно преуменьшение показания прибора.

Допустим для простоты, что сила трения F в приборе пропорциональна $\frac{dh}{d\tau}$:

$$F = c \frac{dh}{d\tau} \quad (\text{здесь } c = \text{const}). \quad (381)$$

Сила трения при отсутствии инерционных сил и при допущении линейной зависимости между P и h равна:

$$F = PQ - \frac{Q^2}{a_1 V_1} h. \quad (382)$$

Поэтому:

$$PQ = c \frac{dh}{d\tau} + \frac{Q^2}{a_1 V_1} h. \quad (383)$$

Отсюда (при условии, что $P = \text{const}$):

$$h = Ce^{-\frac{Q^2 \tau}{a_1 c V_1}} + Pa_1 V_1. \quad (384)$$

При условии, что $h = 0$ при $\tau = 0$, получаем:

$$h = \frac{Pa_1 V_1}{Q} \left(1 - e^{-\frac{Q^2 \tau}{a_1 c V_1}}\right). \quad (385)$$

Полученное h будет вообще меньше того, которое получилось бы при длительном действии давления. В результате этого будет зарегистрировано некоторое другое давление, равное:

$$P_1 = \frac{hQ}{a_1 V_1}. \quad (386)$$

Подставляя в формулу (386) значение для h , находимое из формулы (385), получаем:

$$P_1 = P \left(1 - e^{-\frac{Q^2 \tau}{a_1 c V_1}}\right). \quad (387)$$

Отсюда находим ошибку измерения P , и в этом случае:

$$P_\Delta = P - P_1 = Pe^{-\frac{Q^2 \tau}{a_1 c V_1}}. \quad (388)$$

Соответствующая относительная ошибка равна:

$$\frac{P_\Delta}{P} = e^{-\frac{Q^2 \tau}{a_1 c V_1}}. \quad (389)$$

Как видно из этого соотношения, ошибка быстро убывает при возрастании времени действия измеряемого напряжения.

При наличии вязкости и инерции одновременно ошибка будет держаться в пределах, соответствующих формулам (389) и (380). При этом формула (389) определяет предел преуменьшения, а формула (380) — предел преувеличения результата.

Учитывая знаки $\frac{P_\Delta}{P}$ (плюс при увеличении и минус при уменьшении), можно написать:

$$-e^{-\frac{Q^2 \tau}{a_1 c V_1}} < \frac{P_\Delta}{P} < +\sqrt{1 + \frac{Ma_1 V_1}{Q^2 \tau^2}} - 1. \quad (390)$$

Эта формула определяет границы возможных отклонений.

При измерениях быстропеременных напряжений в грунтах следует помимо учета всех изложенных соображений стремиться к следующему. Нужно, чтобы собственный период колебаний динамометра соответствовал собственному периоду колебаний того грунта, который при отсутствии динамометра заполнял бы объем, занятый динамометром. Это требование представляет собой дальнейшее приложение и развитие принципа однородности свойств грунта и динамометра.

Собственный период колебаний некоторого объема грунта высотой H можно определить из условий резонанса слоя указанной толщины. Эти условия приводят к следующему общезвестному соотношению:

$$H = \frac{1}{2} \lambda, \quad (391)$$

где λ означает длину волны.

Длина волны в свою очередь может быть определена так:

$$\lambda = \frac{v}{\tau}, \quad (392)$$

где v — скорость распространения колебаний,

τ — период колебаний.

Приближенно можно принять:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (393)$$

где E — модуль сжатия,

ρ — плотность грунта.

Из формул (391), (392) и (393) получаем:

$$\tau = \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{2H}. \quad (394)$$

Именно эту величину должен иметь также и период самого динамометра.

Собственный период динамометра можно исчислить, исходя из закономерностей гармонического движения (считая, что динамометр — линейно деформируемая система).

Пусть M — масса мембраны и других частей, перемещающихся при деформации, и деформация h соответствует давлению P .

Тогда:

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{Mh}{PQ}}, \quad (395)$$

где Q — площадь мембраны.

Из формул (394) и (395) получаем:

$$2\pi \sqrt{\frac{Mh}{PQ}} = \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{2H}. \quad (396)$$

Это уравнение наряду с требованием одинаковой плотности и сжимаемости дает основание для конструирования оптимальных приборов закладываемых в грунт, почву и вообще в любую иную деформируемую среду.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

Резюмируя результаты исследований в области физики грунтов и почв, изложенные в этой книге, можно отметить следующее.

1. Все почвы и грунты являются особой формой дисперсных систем, отличающейся значительной сложностью своей структуры и многообразием своих свойств. Трудность количественного анализа явлений, протекающих в почвах и грунтах, усугубляется также и значительными флуктуациями всех количественных характеристик в пространстве и времени. Поэтому многие вопросы в области грунтов и почв можно разрешать только статистическими методами, которые широко использованы здесь, но несомненно могут быть развиты еще шире.

2. Почвы и грунты являются вообще трехфазными системами, потому что состоят из твердого скелета, содержат в себе практически всегда известное количество воды и включают часто в себя воздух, водяные пары и иногда и другие газы, а также безусловно всегда в той или иной форме ограничены атмосферным воздухом.

3. Анализируя силы, обуславливаемые наличием поверхности раздела между водой и воздухом (внутри грунта или на его поверхности), можно построить капиллярную физику и механику грунтов, позволяющую определять количественно гигроскопическую влажность, силы сцепления и при известных условиях — модуль упругости и временное сопротивление сдвигу.

4. Структура воды, заключенной в порах грунта, обладает рядом особенностей. Слои воды, примыкающие к поверхности твердой фазы, отличаются особыми механическими свойствами. Учитывая эти свойства, можно установить количественную зависимость между модулем упругости и размером частиц и внести существенные дополнения в расчет количества гигроскопической воды, заключенной в грунте.

5. Анализируя взаимодействие частиц грунта друг с другом как некоторую сложную, подчиненную статистическим законам систему, можно установить коэффициент бокового давления в зависимости от внутреннего трения, сцепления, структуры грунта и внешнего давления. Можно также при помощи указанных приемов установить закон распределения напряжений в грунте (пока в случае плоской задачи), а также проанализировать зависимость внутреннего трения от величины и скорости деформаций и наметить методы теоретического анализа влияния вибраций на прочность почв и грунтов.

6. Ряд задач, связанный с грунтами, решается весьма успешно при применении различных физико-математических аналогий. Учитывая сложность различных количественных теорий в области грунтов, оказывается иногда целесообразным принять и не вполне строгие аналогии. Здесь в качестве примера подобных аналогий рассмотрены следующие:

а) аналогия между динамическими и статическими процессами в приложении к расчету напряжений в системе из ряда плоскопараллельных слоев грунта с разными механическими свойствами;

б) электрогидродинамическая аналогия применительно к расчету скорости деформаций водонасыщенного грунта.

7. Наконец в заключение здесь рассмотрены элементы теории приборов, предназначенных для изучения различных явлений в грунтах. При этом даны методы расчета тех неизбежных искажений, которые вносятся в изучаемое явление вследствие взаимодействия прибора и грунта, и указаны пути к уменьшению указанных искажений до возможного минимума.

8. Таким образом здесь собраны различные методы, позволяющие путем анализа физико-механических свойств грунта как дисперсной системы определять его прочность и другие характеристики, важные для инженерно-строительного дела, горного дела, геологии и гидро-геологии, агротехники, дорожного дела и почвоведения вообще. Кроме того многие из описанных здесь методов могут быть перенесены в области техники, где имеют значение дисперсные системы. В первую очередь здесь следует указать на область стройматериалов¹.

¹ Именно этот вывод подчеркнут в резолюции совещания по физике дисперсных систем, имевшего место в техническом отделении Академии наук СССР в июне 1936 г., «Известия технич. отд. Акад. наук СССР» (в печати).

